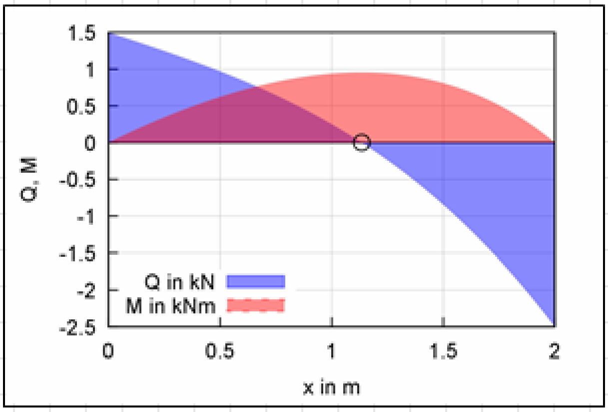
$L := 2\ \mathrm{m}$ $\qquad q_0 := 2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$

$\boxed{x_0 = 1,13\ \mathrm{m}}$

$x_0 = 0,567\ L$

$\boxed{M\left(x_0\right) = 955\ \mathrm{N\ m}}$

$M\left(x_0\right) = 0,119\ q_0 \cdot L^2$



$$\mathrm{Draw2D}\left(\begin{cases} general \\ QM \\ Mmax \end{cases};\ \begin{cases} 300 \\ 200 \end{cases}\right)$$

3.3 Aufgabe 2.2: Stückweise stetige Streckenlast

Im Grunde ist dies ein weiterer Lastfall für Aufgaben 2.2 (Abschnitt 3.2). Allerdings ist die stückweise stetige (bereichsweise definierte) Streckenlast eine Herausforderung für Maximas Integrations- und Lösungsfunktionen.

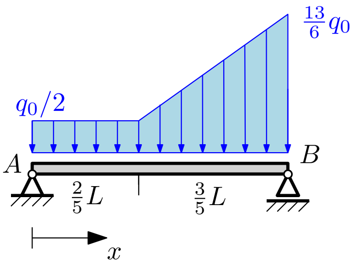


Abbildung 3.2: Stückweise stetiger Streckenlastverlauf

Zu Beginn werden die Maxima-Sitzung zurückgesetzt und die Übernahme der Integralfunktion aktiviert.

```
MaximaControl("restart") = "Restart complete."
MaximaTakeover("int") = "int() handled by Maxima"
```

Dann werden zwei Hilfsfunktionen definiert:

step(x) Sprungfunktion, hat bei $x < 0$ den Wert 0, bei $x > 0$ den Wert 1 und bei $x = 0$ den Wert $0,5$.

simp(x) Vereinfachungsfunktion. Sie wendet auf x die Anzeigevereinfachungen an. Das wird bei Definitionen normalerweise nicht gemacht, wird aber beim Umgang mit stückweise stetigen Funktionen erforderlich.

$$step(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \mathrm{sign}(x)\right)$$

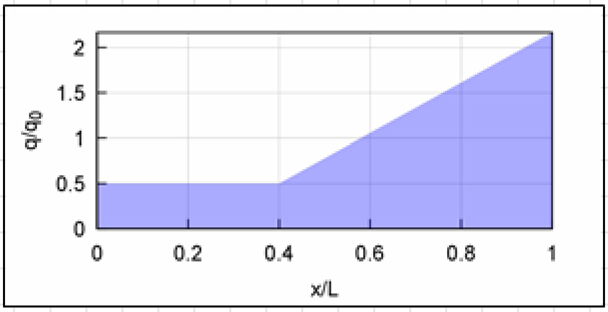
$$simp(s\#) := \big|\ \mathrm{str2num}\left(\mathrm{num2str}(s\#)\right)$$

Die Streckenlast soll aus einem konstanten und einem linearen Anteil bestehen. Der Übergang soll bei $x_1 = 2/5\,L$ liegen und die Resultierende soll wie bei den Lastfällen der Aufgabe 2.1 gleich $q_0 L$ sein.

Die Rechnung erfolgt zunächst mit als Einheiten gekennzeichneten Parametern, später werden dafür noch Zahlenwerte mit richtigen Maßeinheiten eingesetzt. L_0 wird verwendet, da die Einheit L schon vergeben ist (Liter).

$$q(x) := q_0 \cdot \left(step\left(\frac{x - x_1}{\mathrm{L}_0} \right) \cdot \frac{25}{9} \cdot \frac{x - x_1}{\mathrm{L}_0} + \frac{1}{2} \right) \qquad x_1 := \frac{2}{5}\,\mathrm{L}_0$$

$$cmd := \begin{cases} filled\_func = 0 \\ fill\_color = \text{"\#0000ffaa"} \\ explicit\left(\dfrac{q\left(x\,\mathrm{L}_0\right)}{q_0} ; x ; 0 ; 1 \right) \\ xlabel = \text{"x/L"} \\ ylabel = \text{"q/q\_0"} \end{cases}$$



$$\mathrm{Draw2D}\left(cmd ; \begin{Bmatrix} 300 \\ 150 \end{Bmatrix} \right)$$

Zunächst der Nachweis, dass die Streckenlastresultierende stimmt. Die Annahme $\mathrm{L}_0 > 0$ wird explizit gemacht, weil die Integralfunktion sonst selber mit einer entsprechenden Annahme weitermacht.

$$\left(assume\left(\mathrm{L}_0 > 0 \right) \right) = \left\{ \mathrm{L}_0 > 0 \right.$$

$$\int_0^{\mathrm{L}_0} q(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{L}_0\, q_0$$

Die zweimalige Integration der Streckenlast wird diesmal unbestimmt durchgeführt. Dabei fallen Integrationskonstanten an, die aus den Randbedingungen bestimmt werden. Die `simp()`-Funktion sorgt dafür, dass in `Q(x)` und `M(x)` die ausgewerteten Integrale und nicht die Integralfunktion selbst gespeichert werden.

$$Q(x) := simp\left(-\int q(x)\,\mathrm{d}x + c_1 \right)$$

$$M(x) := simp\left(\int Q(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \right)$$

Die Integrationskonstanten c_1, c_2 und die Auflagerreaktionenwerden aus den Randbedingungen bestimmt. Die Gleichungen könnte man auch direkt in einen Vektor schreiben, aber hier werden sie einzeln definiert. Da die Priorität der Zuweisung $:=$ höher ist als die logische (Boolsche) Gleichheit, müssen die Gleichungen geklammert werden.

$Gl_1 := (Q(0) = A)$ Querkraft am Auflager A

$Gl_2 := (Q(L_0) = -B)$ Querkraft am Auflager B

$Gl_3 := (M(0) = 0)$ Momentenfreiheit am Auflager A

$Gl_4 := (M(L_0) = 0)$ Momentenfreiheit am Auflager B

Die Lösung des Systems erfolgt mit Maximas `Solve()`-Funktion, die Zuweisung des Ergebnisses mit `Assign()`. Die Funktion `Unknowns()` des Plugins Nonlinear Solvers liefert die unbekannten (nicht definierten) Variablen in den Gleichungen. Maßeinheiten werden nicht als Unbekannte erkannt, auch selbstdefinierte nicht.

$$\text{Unknowns}(Gl) = \begin{bmatrix} A \\ B \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Assign}(\text{Solve}(Gl; \text{Unknowns}(Gl))) = \begin{cases} \dfrac{7\,L_0\,q_0}{20} \\ \dfrac{13\,L_0\,q_0}{20} \\ \dfrac{43\,L_0\,q_0}{180} \\ \dfrac{2\,q_0\,L_0^2}{135} \end{cases}$$

Lastverteilung auf die Lager:

$$A = \frac{7\,L_0\,q_0}{20} \qquad B = \frac{13\,L_0\,q_0}{20}$$

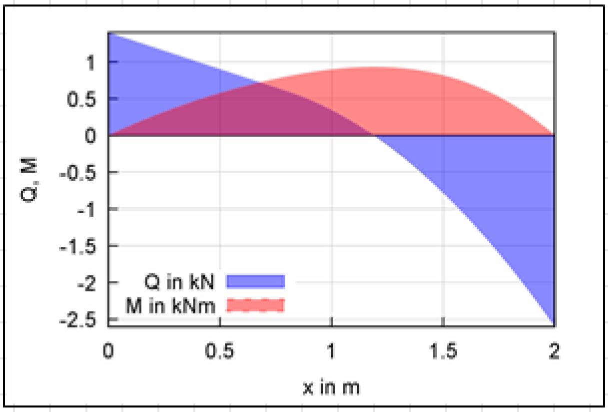
Für den Vergleich mit den Ergebnissen der Aufgabe 2.1 werden wieder die Parameter zahlenmäßig angegeben:

$$L_0 := 2\ \text{m} \qquad q_0 := 2\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Querkraft- und Momentenlinie:

```
QM := { key = "Q in kN"
        filled_func = 0
        fill_color = "#0000ff88"
        explicit( Q(x)/kN ; x ; 0 ; L_0 )
        fill_color = "#ff000088"
        key = "M in kNm"
        explicit( M(x)/(kN m) ; x ; 0 ; L_0 ) }

general := { xlabel = "x in m"
             ylabel = "Q, M"
             key_pos = bottom_left }
```




```
Draw2D( { general ; QM } ; { 300 ; 200 } )
```

Bleibt noch die Bestimmung von Ort und Wert des maximalen Biegemoments. Das kann man exakt mit `Solve()` machen, wesentlich einfacher ist es in diesem Fall aber numerisch mit `FindRoot()`.

Exakt mit `Solve()` `Solve()` findet keine exakte Lösung, weil es die `sign()`-Funktion nicht auflösen kann.

```
Lsg := (Solve(Q(x_0); x_0)) = { x_0 = - (2·√m·(-√m + √(5·(10·((1 + sign(5·x_0 - 4 m ...
                                x_0 = (2·√m·(√m + √(5·(10·((1 + sign(5·x_0 - 4 m))·| ... ) / 2
```

Daher muss man Maxima mit einer Annahme etwas helfen. Praktisch bedeutet $5x_0 - 4\mathrm{m} > 0$, dass die Nullstelle im rechten Bereich des Balkens vermutet wird.

Das hält Maxima nicht davon ab, für den im rechten Bereich gültigen Querkraftverlauf Lösungen anzubieten, die nicht in diesem Bereich liegen. Die Auswahl der sinnvollen Lösung erfolgt wieder anhand der Dezimalbruchdarstellung.

```
ML(assume(5·x_0 - 4 m > 0)) = { 5·x_0 > 4 m

Lsg := (Solve(Q(x_0); x_0)) = { x_0 = - m·(-11 + 3·√39) / 25
                                x_0 = m·(11 + 3·√39) / 25

ML(float(Lsg)) = { x_0 = -0,309399759807807 9 m
                   x_0 = 1,189399759807807 9 m

Assign(Lsg_2) = 1,19 m      M(x_0) = 930 N m
```

Numerisch mit FindRoot() Das geht einfach, erfordert aber eine Anfangsschätzung. Die Lösungsvariable muss vorher gelöscht werden.

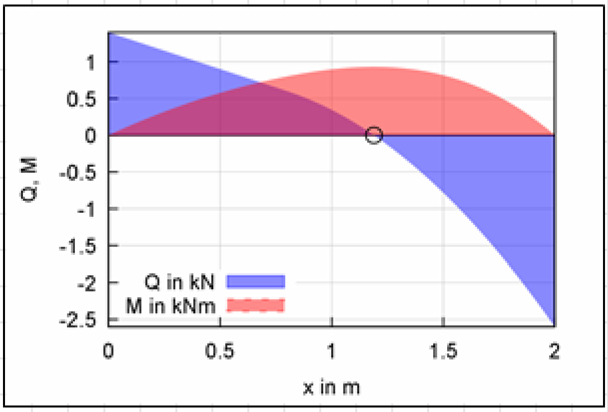
$$\mathrm{Clear}\left(x_0\right) = 1$$

$$\mathrm{FindRoot}\left(Q\left(x_0\right);\ x_0 = L_0\right) = 1{,}19\ \mathrm{m}$$

Die gefundene Lösung wird zur Berechnung des Maximalmoments benutzt und zur Kontrolle noch in das Verlaufsdiagramm eingetragen.

$$\boxed{x_0 = 1{,}19\ \mathrm{m}} \qquad \boxed{M\left(x_0\right) = 930\ \mathrm{N\ m}}$$

$$Mmax := \left\| \begin{cases} point\_type = circle \\ color = black \\ key = \text{""} \\ points\left(\left[\begin{matrix} \dfrac{x_0}{\mathrm{m}} & 0 \end{matrix}\right]\right) \end{cases} \right\|$$



$$\mathrm{Draw2D}\left(\begin{cases} general \\ QM \\ Mmax \end{cases};\ \begin{cases} 300 \\ 200 \end{cases}\right)$$