Линейная алгебра
Матрицы

2004 г.
Андрей Ивашов

Содержание

Основные понятия

Матрица - $A_{mn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$ - упорядоченная прямоугольная таблица чисел (где элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mn}$ составляют ***главную диагональ*** матрицы, а элементы $a_{1n}, \ldots, a_{m1}$ - ***побочную***). Тело матрицы может быть записано как в круглых скобках (на рисунке слева), так и между двух двойных вертикальных линий (справа). Данные записи абсолютно идентичны.

Единичная - $E_{mn}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ - матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а на местах остальных элементов находятся нули.

Квадратная – $A_{mm}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$ - матрица, число строк которой равно числу её столбцов.

Квадратичная – $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - матрица, состоящая из двух строк и двух столбцов.

Кубическая – $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрица, состоящая из трёх строк и трёх столбцов.

Вырожденная – квадратная матрица, определитель которой равен нулю (особая).

Невырожденная – квадратная матрица, определитель которой не равен нулю (неособая).

11. Пример: Найти обратную матрицу по теореме Лапласа

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix};\quad \det(A)=-1;$$

$$A_{11}=(-1)^2 M_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-1;\qquad A_{21}=(-1)^3 M_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{12}=(-1)^3 M_{12}=-\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=38;\qquad A_{22}=(-1)^4 M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=-41;$$

$$A_{13}=(-1)^4 M_{13}=\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-27;\qquad A_{23}=(-1)^5 M_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=29;$$

$$A_{31}=(-1)^4 M_{31}=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{32}=(-1)^5 M_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=34;$$

$$A_{33}=(-1)^6 M_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}=-24;$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix};\tilde{A}^T=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix};A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Ответ получен.

12. Пример: Найти обратную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix};\quad \det(A)=\cos^2(a)+\sin^2(a)=1;$$

$$\tilde{A}^T=\begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A^{-1}=\begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

Ответ получен.

13. Пример: Найти ранг матрицы методом окаймления миноров

Коммутативные матрицы *– две матрицы удовлетворяющие условию $A\cdot B=B\cdot A$ (перестановочные).*

Расширенная – $A'_{m(n+1)}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ *- матрица, в которой, помимо её основной части, присутствуют ещё и свободные члены.*

Треугольная – $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - *квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю (слева на примере – **верхняя треугольная**; справа – **нижняя треугольная**).*

Прямоугольная – $A_{mn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - *матрица, состоящая из m строк и n столбцов.*

Ступенчатая матрица – $A_{(m+i)n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ - *матрица у которой все элементы стоящие под главной диагональю равны нулю, содержащая нулевые строки (столбцы).*

Нулевая матрица - $A_{mn}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ - *матрица, все*

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\2&-1&-4&3\\3&2&-5&6\end{array}\right)\underset{III-3I}{\overset{II-2I}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\0&-7&-2&3\\0&-7&-2&6\end{array}\right)\overset{III-II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\0&-7&-2&3\\0&0&0&3\end{array}\right)$$

- нет решений.

Ответ получен.

7. *Пример: Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=7\\x_1+2x_2+x_3=8;\\x_1+x_2+2x_3=9\end{cases}$$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&7\\1&2&1&8\\1&1&2&9\end{array}\right)\underset{2III-I}{\overset{2II-I}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&7\\0&3&1&9\\0&1&3&11\end{array}\right)\overset{III-II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&7\\0&3&1&9\\0&0&8&24\end{array}\right)\overset{\frac{1}{8}III}{\sim}$$

$$\overset{\frac{1}{8}III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&7\\0&3&1&9\\0&0&1&3\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\\x_3=3\end{cases}.$$

Ответ получен.

8. *Пример: Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases}x+2y+3z=3\\3x+y+2z=7;\\2x+3y+z=2\end{cases}$$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&3\\3&1&2&7\\2&3&1&2\end{array}\right)\underset{III-2I}{\overset{II-3I}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&3\\0&-5&-7&-2\\0&-1&-5&-4\end{array}\right)\underset{(-1)III}{\overset{(-1)II}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&3\\0&5&7&2\\0&1&5&4\end{array}\right)\overset{II-5III}{\sim}$$

$$\overset{II-5III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&3\\0&0&-18&-18\\0&1&5&4\end{array}\right)\overset{\left(-\frac{1}{18}\right)II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&3\\0&1&5&4\\0&0&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\\z=1\end{cases}.$$

Ответ получен.

9. *Пример: Решить систему уравнений методом Крамера*

Свойства матриц

<u>Сложение (вычитание) матриц</u>

Складывать (вычитать) можно только матрицы одинаковых размеров. При сложении (вычитании) двух матриц каждый элемент первой матрицы складывается (вычитается) с соответствующим элементом второй.

Пример: Сложить и вычесть две матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix};\quad C=A+B;\quad D=B-A;$$

$$C=\begin{pmatrix}(1+2)&(0+3)\\(2+4)&(-1+5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\6&4\end{pmatrix};D=\begin{pmatrix}(2-1)&(3-0)\\(4-2)&(5+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}.$$

Ответ получен.

<u>Произведение матриц</u>

При умножении матриц A_{mn} и B_{nl} получается C_{ml} матрица, т.е. перемножать можно лишь соответственные друг другу матрицы. Каждый элемент конечной матрицы равен сумме произведений соответствующих элементов итой (i) строки первой матрицы и житого (j) столбца второй. Умножение производится по правилу «строка на столбец».

Пример: Найти произведение двух матриц

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix};$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}(1\cdot2+0\cdot4)&(1\cdot3+0\cdot5)\\(2\cdot2+(-1)\cdot4)&(2\cdot3+(-1)\cdot5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}.$$

Ответ получен.

<u>Теоремы о матрицах</u>

1. ***<u>Теорема Кронекера-Капелли</u>***

   Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу её расширенной матрицы.

2. ***<u>Основная теорема теории систем линейных уравнений</u>***

   Пусть имеется совместная система уравнений, A - расширенная матрица этой системы и ранг A равен n ($rang(A)=n$). Тогда неизвестные $x_1, x_2, ..., x_k$ можно объявить главными в том и только том случае, когда

<u>Примеры с решениями</u>

1. ***Пример: Вычислить*** $C = 5A - 2B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix};$$

$$C = 5\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 5 & 20 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 19 & 15 \\ 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ получен.

2. ***Пример: Вычислить произведение матриц*** AB

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1+6+3 & 2-6+0 & 4+2+6 \\ 5+12-5 & 10-12+0 & 20+4-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 12 \\ 12 & -2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Ответ получен.

3. ***Пример: Вычислить определитель матрицы методом Гаусса***

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & \underline{1} & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 5 & 3 & 7 & 9 \\ 8 & 7 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{II-3I \\ III-I}}{\underset{\substack{IV-3I \\ V+3I}}{\sim}} \begin{vmatrix} 3 & 4 & \underline{1} & 2 & 1 \\ -6 & -7 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 8 \\ -6 & -7 & 0 & 1 & 6 \\ 17 & 19 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & -7 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \\ -6 & -7 & \underline{1} & 6 \\ 17 & 19 & 6 & 7 \end{vmatrix} \overset{\substack{I+III \\ II-3III}}{\underset{IV-6III}{\sim}} \begin{vmatrix} -12 & -14 & 0 & 4 \\ 21 & 25 & 0 & -10 \\ -6 & -7 & \underline{1} & 6 \\ 53 & 61 & 0 & -29 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -12 & -14 & 4 \\ 21 & 25 & -10 \\ 53 & 61 & -29 \end{vmatrix} =$$

$$= (8700 + 7420 + 5124) - (5300 + 7320 + 8526) = 98.$$

Ответ получен.

Здесь приведён пример разложения определитель по итой строке. При разложении по j *-тому столбцу сумма будет выглядеть следующим образом:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \mathbf{K} + a_{mj} A_{mj}.$$

<u>Метод Гаусса</u>

Как уже отмечалось, в первом способе нахождения определителя, для его применения рациональнее использовать строку (столбец) который содержит максимальное количество нулей. Оказывается данную ситуацию можно и нужно создать искусственно. Именно в этом и состоит суть метода Гаусса для нахождения определителя произвольного порядка.

В искомом определителе необходимо найти элемент, не равный нулю (оптимально – равный единице), затем, элементарными преобразованиями, над строкой (столбцом) этого элемента привести все элементы, принадлежащие столбцу (строке), на котором находится элемент, к нулю. Теперь, с чистой совестью, раскладываем детерминант по модифицированному столбцу (строке) по рекуррентной формуле (см. выше). Таким образом, мы получили определитель на порядок ниже исходного. Если есть необходимость в дальнейшем его понижении, применяем весь описанный алгоритм заново, но уже с полученным детерминантом.

Пример: Вычислить определитель методом Гаусса

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & \underline{1} \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{II-2I \\ III-2I}}{\underset{IV-2I}{\sim}} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & \underline{1} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & \underline{1} \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{II-I}{\sim} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & \underline{1} \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (4 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1)) = 4.$$

Ответ получен.

По приведённой формуле можно вычислить определители любого порядка, однако есть методы для частных случаев: определителей первого, второго и третьего порядков.

Нахождение координат вектора при смене базиса

$X = PX' \quad \Rightarrow \quad X' = P^{-1}X$ *где*

X *- исходный вектор;*

P *- матрица перехода по базису;*

X' *- искомый вектор.*

Очевидно, что при смене базиса, координаты принадлежащего ему вектора тоже меняются. Суть данного метода в нахождении координат вектора в новом базисе.

Пример: В базисе e ***задан вектор*** $\vec{x}$***, найти его координаты в базисе*** e'

$$e' : \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 11e_3 \\ e_2' = 1{,}1e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} ; \quad \vec{x}\{1;10;10\}.$$

(Данный пример может быть решён двумя способами: либо перемножаем исходный вектор X *с матрицей перехода* P *и выражаем из полученной системы искомый вектор* X'*; либо находим матрицу обратную к матрице перехода* P^{-1}*, умножаем её на исходный вектор* X*, автоматически получая искомый вектор* X'*. Разберём оба варианта.)*

$$\textbf{I.} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = PX' \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + 1{,}1x_2' - x_3' \\ x_2 = x_1' - x_2' + x_3' \\ x_3 = 11x_1' + x_3' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = x_1 + 1{,}1x_2 - 0{,}1x_3 \\ x_2' = -10x_1 - 12x_2 + 2x_3 \\ x_3' = -11x_1 - 12{,}1x_2 + 2{,}1x_3 \end{cases};$$

$$\textbf{II.} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}1 & -0{,}1 \\ -10 & -12 & 2 \\ -11 & -12{,}1 & 2{,}1 \end{pmatrix} \Rightarrow X' = P^{-1}X \ ;$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}1 & -0{,}1 \\ -10 & -12 & 2 \\ -11 & -12{,}1 & 2{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = x_1 + 1{,}1x_2 - 0{,}1x_3 \\ x_2' = -10x_1 - 12x_2 + 2x_3 \\ x_3' = -11x_1 - 12{,}1x_2 + 2{,}1x_3 \end{cases}.$$

Ответ получен.

Бесспорно, второй вариант предпочтительнее, т.к. отпадает необходимость проделывать громоздкие действия над системой уравнений из первого.

Свойства определителей

1. *При транспонировании определитель матрицы не меняется.*
2. *При перестановке местами любых двух строк (столбцов) квадратной матрицы определитель меняет знак но сохраняет свою абсолютную величину.*

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}}_{a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}}.$$

3. *Если квадратная матрица имеет две одинаковые строки (столбца), то её определитель равен нулю.*
4. *Если соответствующие элементы каких-либо двух строк (столбцов) квадратной матрицы пропорциональны, то её определитель равен нулю.*
5. *Если одна из строк (столбцов) матрицы является линейной комбинацией других её строк (столбцов), то определитель такой матрицы равен нулю.*
6. *Общий множитель всех элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.*

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7. *Определитель квадратной матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой её строки (столбца), умноженные на любое число.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22} + \lambda a_{12}\right) - a_{12}\left(a_{21} + \lambda a_{11}\right) =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + \lambda\left(a_{12}a_{11} - a_{12}a_{11}\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

8. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) квадратной матрицы на алгебраические дополнения соответствующим элементам другой строки (столбца) равна нулю.*

$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0$, *при* $i \neq j$.

9. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.*

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Линейная зависимость

Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *являются линейно зависимыми, если существуют такие* l_1, l_2, l_3 *среди которых хотя бы одно не равно нулю и при этом выполняется равенство* $l_1\vec{a}+l_2\vec{b}+l_3\vec{c}=0$.

Метод проверки

$\vec{a}\{x_a;y_a;z_a\}$; $\vec{b}\{x_b;y_b;z_b\}$; $\vec{c}\{x_c;y_c;z_c\}$;

Для проверки векторов на их линейную зависимость друг с другом составим систему векторов:

$$l_1\begin{pmatrix}x_a\\y_a\\z_a\end{pmatrix}+l_2\begin{pmatrix}x_b\\y_b\\z_b\end{pmatrix}+l_3\begin{pmatrix}x_c\\y_c\\z_c\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}l_1x_a+l_2x_b+l_3x_c=0\\ l_1y_a+l_2y_b+l_3y_c=0\\ l_1z_a+l_2z_b+l_3z_c=0\end{cases};$$

Решим её, к примеру, методом Гаусса. Теперь, если все параметры (l_1, l_2, l_3 *) определены (т.е. ранг основной матрицы, полученной из системы векторов равен числу параметров) и равны нулю, то вектора не являются линейно зависимыми, в обратном случае (когда ранг меньше количества параметров) – являются.*

Пример: Проверить линейную зависимость

$\vec{a}\{1;-1;2\}$; $\vec{b}\{-1;1;-1\}$; $\vec{c}\{2;-1;1\}$ $\Rightarrow$

$$l_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+l_2\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}+l_3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}l_1-l_2+2l_3=0\\ -l_1+l_2-l_3=0\\ 2l_1-l_2+l_3=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&0\\-1&1&-1&0\\2&-1&1&0\end{array}\right)\underset{III-2I}{\overset{II+I}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&0\\0&0&1&0\\0&1&-3&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&0\\0&1&-3&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}l_1=0\\l_2=0\\l_3=0\end{cases}$$ *- вектора* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *линейно независимы.*

Ответ получен.

Теорема Лапласа

Для нахождения обратной матрицы по теореме Лапласа необходимо научиться пользоваться следующим определением обратной матрицы:

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\tilde{A}^T$, *при* $\det(A)\neq 0$.

Необходимо выполнить следующие действия:

a. *Найти определитель матрицы(по теореме об условии существования обратной матрицы, определитель основной матрицы не может быть равен нулю);*
b. *Получить союзную матрицу для основной;*
c. *Транспонировать союзную матрицу;*
d. *Поделить полученную матрицу на её определитель.*

Пример: Найти обратную матрицу по теореме Лапласа

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-5\\1&3&0\\0&2&1\end{pmatrix};\quad \det(A)=-1;$$

$A_{11}=(-1)^2M_{11}=\begin{vmatrix}3&0\\2&1\end{vmatrix}=3;$

$A_{12}=(-1)^3M_{12}=-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1;$

$A_{13}=(-1)^4M_{13}=\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}=2;$

$A_{21}=(-1)^3M_{21}=-\begin{vmatrix}0&-5\\2&1\end{vmatrix}=-10;$

$A_{22}=(-1)^4M_{22}=\begin{vmatrix}3&-5\\0&1\end{vmatrix}=3;$

$A_{23}=(-1)^5M_{23}=-\begin{vmatrix}3&0\\0&2\end{vmatrix}=-6;$

$A_{31}=(-1)^4M_{31}=\begin{vmatrix}0&-5\\3&0\end{vmatrix}=15;$

$A_{32}=(-1)^5M_{32}=-\begin{vmatrix}3&-5\\1&0\end{vmatrix}=-5;$

$A_{33}=(-1)^6M_{33}=\begin{vmatrix}3&0\\1&3\end{vmatrix}=9;$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-10&3&-6\\15&-5&9\end{pmatrix};\ \tilde{A}^T=\begin{pmatrix}3&-10&15\\-1&3&-5\\2&-6&9\end{pmatrix};\ A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&10&-15\\1&-3&5\\-2&6&-9\end{pmatrix}.$$

Ответ получен.

Ранг матрицы

Рассмотрим два метода нахождения ранга матрицы.

Метод окаймления миноров

Для нахождения ранга матрицы по данному методу необходимо найти минор первого порядка матрицы отличный от нуля, затем, окаймляя найденный минор с двух сторон двумя прилежащими к нему строкой и столбцом, проверить чему он равен. Если данный минор (уже второго порядка) не равен нулю, следующая итерация окаймления производиться над ним. Данный алгоритм действителен пока очередной минор не будет равен нулю. Если так, то необходимо проверить, возможно ли провести его окаймление с другими строкой и/или столбцом. В случае положительного ответа на данный вопрос дальнейшее окаймление проводится с участием уже нового минора. В противном случае решение останавливается и ранг матрицы оказывается равным порядку последнего, не равного нулю, минора.

Пример: Найти ранг матрицы методом окаймления миноров

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&4&7&10\end{pmatrix}\Rightarrow M_1^1=1\neq 0\Rightarrow M_{1,2}^{1,2}=\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{1,2,3}^{1,2,3}=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&1\\3&4&7\end{vmatrix}=0;\ M_{1,2,3}^{1,2,4}=\begin{vmatrix}1&2&4\\1&0&2\\3&4&10\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

(т.к. больше миноров третьего порядка, окаймляющих $M_{1,2}^{1,2}$, второго порядка, в матрице нет, её ранг равен двум)

$$\Rightarrow\quad \operatorname{rang}(A)=2.$$

Ответ получен.

Метод Жордана - Гаусса

Метод заключается в том, чтобы элементарными преобразованиями (не только над строками, но и столбцами) над исходной матрицей, привести её к виду единичной, при этом удаляя строки (столбцы), состоящие из одних нулей. В итоге получится единичная матрица n-го порядка и ранг исходной матрицы будет равен n. Иначе говорят, ранг будет равен числу, определяющему количество единиц

Решение систем уравнений

С помощью матриц можно решить лишь системы линейных алгебраических уравнений. В некоторых случаях систему можно привести к данному определению методом подстановки.

Матричный метод

Метод решения систем линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы.

$A\cdot X=B\quad\Rightarrow\quad X=A^{-1}\cdot B$, *при* $\Delta=\det(A)\neq 0$; *где*

A *- числовая матрица;*

B *- матрица-столбец свободных членов (ответов);*

X *- матрица-столбец неизвестных.*

Пример: Решить систему уравнений матричным методом (с помощью обратной матрицы)

Найти все неизвестные системы матричным методом решения систем линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases}3x_1-5x_3=5\\x_1+3x_2=-1\\2x_2+x_3=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x_1+0x_2-5x_3=5\\x_1+3x_2+0x_3=-1\\0x_1+2x_2+x_3=-2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A=\begin{pmatrix}3&0&-5\\1&3&0\\0&2&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \det(A)=-1\neq 0;\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&10&-15\\1&-3&5\\-2&6&-9\end{pmatrix}\ \Rightarrow (*)$$

$$X=\begin{pmatrix}-3&10&-15\\1&-3&5\\-2&6&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-3)5+10(-1)+(-15)(-2)\\1\cdot5+(-3)(-1)+5(-2)\\(-2)5+6(-1)+(-9)(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x_1=5\\x_2=-2\\x_3=2\end{cases}.$$

(*) – Для того чтобы научиться находить обратные матрицы читайте раздел «Обратная матрица».

Ответ получен.

Диагональная – $A_{mm} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{12} & 1 & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ - *матрица, на главной диагонали которой находятся только единицы.*

Симметрическая – $A_{mm} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$ - *матрица, все элементы которой подчиняются правилу* $a_{ij} = a_{ji}$, *всегда квадратная.*

Транспонированная – $A^T_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ - *матрица, в которой все строки стоят на месте столбцов, а столбцы, соответственно, на месте строк (при этом определитель транспонированной матрицы по отношению к исходной остаётся прежним).*

Союзная - $\tilde{A}_{mn} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$ - *матрица, все элементы которой заменены на их алгебраические дополнения.*

Обратная – A^{-1} - *матрица, удовлетворяющая условию* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Мультиколлинеарная – $A = \begin{pmatrix} x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$ - *матрица, одна из строк которой линейно зависима от другой строки этой матрицы.*

Соответственные матрицы – *две матрицы, число строк первой из которых соответствует числу столбцов второй, но не наоборот.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow M_1^2 = -4 \neq 0 \Rightarrow M_{1,2}^{2,3} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow M_{1,2,3,4}^{1,2,3,4} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_{1,2,3,4}^{1,2,3,5} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 3.$$

Ответ получен.

14. Пример: Найти матрицу оператора в базисе e', если в базисе e матрица имеет вид A_e

$$e' : \begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 + e_3 \\ e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3 \\ e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}; \quad A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_{e'} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 23 \\ -3 & -1 & 15 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ получен.

элементы которой равны нулю ($a_{ij}=0$).

<u>Определитель</u> – $\Delta=\det\left(A_{mn}\right)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{vmatrix}$ - *есть числовая характеристика матрицы (детерминант).*

<u>Минор</u> - M_{ij} *- минором элемента* a_{ij} *квадратной матрицы порядка* n *называется определитель* $(n-1)$ *порядка, который получается из определителя вычёркиванием итой (* i *) строки и житого (* j *) столбца.*

Иногда обозначается как $M_{\text{строки}}^{\text{столбцы}}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\Rightarrow\det\left(a_{23}\right)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=M_{23}=M_{1,3}^{1,2}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

<u>Алгебраическое дополнение</u> - A_{ij} *- алгебраическим дополнением элемента* a_{ij} *называется произведение* $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$. *Из чего следует, что алгебраическое дополнение элемента может отличаться от его минора лишь знаком.*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\Rightarrow A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}\Rightarrow A_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

<u>Линейная комбинация</u> *– Линейной комбинацией каких-либо математических объектов* $u_1,u_2,\ldots u_n$ *, для которых определены действия сложения, и умножения на число называется сумма произведений этих объектов на заданные числа.* $l_1u_1+l_2u_2+\ldots+l_nu_n$ *, где* l_1 *- заданное число.*

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3=8\\ 2x_1-4x_2-3x_3=-1\\ x_1+5x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & -4 & -3\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}8\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\det(A)=\Delta=41$ *;*

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}8 & 4 & 2\\ -1 & -4 & -3\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix}=82;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 8 & 2\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-41;\ \Delta_3=\begin{vmatrix}3 & 4 & 8\\ 2 & -4 & -1\\ 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=123;$$

$$\Rightarrow\quad x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=2;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-1;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=3\ .$$

Ответ получен.

10. *Пример: Найти обратную матрицу по теореме Лапласа*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1/2 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 7\end{pmatrix};\quad \det(A)=-1;$$

$$A_{11}=(-1)^2M_{11}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-2;\qquad A_{21}=(-1)^3M_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-14;$$

$$A_{12}=(-1)^3M_{12}=-\begin{vmatrix}1/2 & 2\\ 2 & 7\end{vmatrix}=\frac{1}{2};\qquad A_{22}=(-1)^4M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 7\end{vmatrix}=7;$$

$$A_{13}=(-1)^4M_{13}=\begin{vmatrix}1/2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2};\qquad A_{23}=(-1)^5M_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{31}=(-1)^4M_{31}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{32}=(-1)^5M_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 2\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{33}=(-1)^6M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1/2 & 0\end{vmatrix}=-1;$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1/2 & 1/2\\ -14 & 7 & 3\\ 4 & -2 & -1\end{pmatrix};\ \tilde{A}^T=\begin{pmatrix}-2 & -14 & 4\\ 1/2 & 7 & -2\\ 1/2 & 3 & -1\end{pmatrix};A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 14 & -4\\ -1/2 & -7 & 2\\ -1/2 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Ответ получен.

$k = rang(A)$ и в столбцах матрицы A с номерами $1, 2, \ldots, k$ располагается ненулевой минор порядка равного рангу матрицы $rang(A)$.

3. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных ($rang(A) = n$), то система имеет единственное решение.
4. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных ($rang(A) < n$), то система неопределённая и имеет бесконечное множество решений.
5. Всякую матрицу конечным числом элементарных преобразований над строками (столбцами) можно превратить в ступенчатую.
6. Если от матрицы A к матрице B можно перейти конечным числом элементарных преобразований над строками (столбцами), то от B к A также можно перейти конечным числом элементарных преобразований над строками (столбцами).
7. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.
8. Ранг ступенчатой матрицы равен числу её нулевых строк.
9. Если число уравнений однородной системы линейных алгебраических уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет хотя бы одно ненулевое решение.
10. Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, обладает решением и притом только одним.

Определители

Разложение по строке (столбцу)

Детерминант находится по рекуррентной формуле разложения определителя по i-той строке (j-тому столбцу). Удобнее выбирать строку (столбец) с наибольшим количеством нулей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{im} A_{im}.$$

4. Пример: Возвести матрицу в третью степень

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ получен.

5. Пример: Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases};$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \underset{III-3I}{\overset{II-2I}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & 3 \end{array}\right) \underset{III-II}{\overset{(-1)II}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- бесконечно много решений (два главных неизвестных и одно свободное неизвестное);

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}(9 + 13x_3) \\ x_2 = \frac{1}{7}(-3 - 2x_3) \\ x_3 \in R \end{cases}.$$

Ответ получен.

6. Пример: Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases};$$

Определитель первого порядка. *Определитель первого порядка от произвольного элемента равен самому элементу.*

$A=(a_{11})$; $\det(A)=|a_{11}|=a_{11}$.

Определитель второго порядка *вычисляется по следующей формуле:*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};\ \det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\ .$$

Определитель третьего порядка *вычисляется по следующей формуле:*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ \det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32})\ .$$

Однако дабы не приходилось запоминать всю эту последовательность слагаемых были созданы методы нахождения определителей третьего порядка, упрощённые для понимания и запоминания.

Правило Саррюса *– первый из таких методов.*

$$(+)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\ (-)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Все соединённые линией элементы перемножаются, образуя набор слагаемых. Из слагаемых левого определителя вычитаются слагаемые правого. Получаемое в итоге число и есть искомый детерминант.

Метод диагоналей *– второй.*

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$-\quad -\quad -+\quad +\quad +$

Дописываем два первых столбца определителя сразу за основной его частью, перемножаем все соединённые линией элементы, складываем все слагаемые, образованные параллельными главной диагонали линиями, и вычитаем остальные.

Заключение

В качестве заключения хотелось бы рассказать о том, как полученные знания могут быть использованы на практике.

Думаю, нет необходимости напоминать о том, что данная информация пригодится при изучении линейной алгебры (и не только: весь последующий курс высшей математики, вплоть до математической физики, будет неразрывно связан с векторной алгеброй), поэтому перейдём сразу к практической реализации.

Компьютеры прочно вошли в нашу жизнь и ни для кого, наверное, уже давно не является секретом то, что в программировании повсеместно используется математика. Однако мало кто знает, что создание пространственных сцен в компьютерных играх и программах трёхмерного моделирования целиком построено на расчете уравнений векторной алгебры. Наиболее сильно это выражается во вращении трёхмерных объектов и моделировании объемного освещения.

Для простоты разберём сферическую систему координат. Вращение сцены производится в несколько шагов:

1. *Вращение базиса в сферической системе координат.*
2. *Преобразование всех векторов нового базиса в декартову систему координат.*
3. *Составление матрицы перехода в новый базис.*
4. *Умножение векторов всех точек сцены на эту матрицу.*
5. *Перерисовка сцены.*

Не буду приводить здесь формул преобразования… всё же цель этой статьи в том, чтобы убедиться в “реальности” рассмотренного материала, а не его реализация.

Важно понимать, что линейная алгебра в купе с аналитической геометрией являют перед нами базовый комплект знаний, необходимый для будущего, углубленного, изучения математики и последующего использования этих знаний по выбранной специальности.

Обратная матрица

Определение обратной матрицы стоит понимать также, как и определение любой обратной функции. Например, $g(x)$ является обратной функцией к $f(x)$, если $g^{-1}(x) = f(x)$, т.е $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Следует понимать, что в силу ряда свойств матриц в их нахождении есть определённые особенности. В будущем, умение находить обратные матрицы пригодиться для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Разберём основные методы получения обратной матрицы.

Теорема об условии существования

Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы её определитель не равнялся нулю.

Теорема о единственности

Если квадратная матрица A имеет обратную A^{-1}, то она (обратная) единственная.

Метод нахождения обратной матрицы из матрицы второго порядка

Данный способ применим лишь в случае, когда матрица является квадратичной. Он не требует знания никаких новых теорем и заключается в четырёх шагах:

a. *Проверяем матрицу на невырожденность (по теореме об условии существования, определитель матрицы не может быть равен нулю) – находим определитель;*
b. *Меняем местами элементы, стоящие на главной диагонали исходной квадратичной матрицы;*
c. *Меняем знаки элементов стоящих на побочной диагонали исходной квадратичной матрицы;*
d. *Делим каждый элемент получившейся союзной транспонированной матрицы на определитель основной.*

Пример: Найти обратную матрицу методом Крамера

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{A}^T = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1} = \begin{vmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ответ получен.

Базис

Хотя определение базиса и выходит за рамки нашей темы, рассмотрим его ввиду тесной связи задач на действия над базисами с свойствами матриц.

Базисом линейного пространства называется упорядоченная система линейно независимых векторов этого пространства. Векторы базиса линейного пространства называются базисными векторами.

Задачи на базисы делятся на несколько типов. Разберём некоторые из них.

Нахождение матрицы оператора при смене базиса

$A_{e'} = P^{-1} A_e P$ *где*

A_e *- исходная матрица оператор;*

P *- матрица перехода по базису;*

P^{-1} *- обратная к матрице перехода;*

$A_{e'}$ *- искомая матрица оператор.*

В типовых задачах для нахождения искомой матрицы оператора необходимо, для начала, самостоятельно составить матрицу перехода (если она не дана в явном виде). Для этого составляем из векторов-столбцов нового базиса матрицу перехода к этому базису P. Далее определяем обратную к ней матрицу P^{-1}. Используем приведённую выше формулу, понимая, что переставлять местами её множители нельзя.

Пример: Найти матрицу оператора в базисе e', если в базисе e матрица имеет вид A_e

$$e': \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ e'_2 = 2e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}; \quad A_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -8 \\ 11 & -9 & 12 \\ 15 & -16 & 19 \end{pmatrix}.$$

Ответ получен.

Метод Гаусса

Метод Гаусса также использует определение обратной матрицы о том, что произведение обратной матрицы с основной коммутативно и равно единичной матрице.

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$$

При нахождении обратной матрицы методом Гаусса, необходимо записать рядом с основной матрицей единичную (как показано ниже), а далее, элементарными преобразованиями над строками расширенной матрицы приводим её левую часть к виду единичной матрицы. Тогда около неё, справа, автоматически получится обратная.

Пример: Найти обратную матрицу методом Гаусса

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-5\\1&3&0\\0&2&1\end{pmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&-5&1&0&0\\1&3&0&0&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{I-3II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&-5&1&0&0\\0&-9&-5&1&-3&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{(-1)II}{\sim}$$

$$\overset{(-1)II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&-5&1&0&0\\0&9&5&-1&3&0\\0&0&-1&2&-6&9\end{array}\right)\underset{(-1)III}{\overset{II+5III}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&-5&1&0&0\\0&9&0&9&-27&45\\0&0&1&-2&6&-9\end{array}\right)\underset{\frac{1}{9}II}{\overset{I+5III}{\sim}}$$

$$\underset{\frac{1}{9}II}{\overset{I+5III}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&-9&30&-45\\0&1&0&1&-3&5\\0&0&1&-2&6&-9\end{array}\right)\overset{\frac{1}{3}I}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&10&-15\\0&1&0&1&-3&5\\0&0&1&-2&6&-9\end{array}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&10&-15\\1&-3&5\\-2&6&-9\end{pmatrix}.$$

Ответ получен.

При нахождении обратной матрицы методом Гаусса не надо предварительно убеждаться в невырожденности основной матрицы, т.к. это получится автоматически. Если в левой части конечной матрицы получается единичная, то основная матрица является невырожденной и обратная ей существует. И наоборот.

в полученной матрице.

$$A\sim\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

Пример: Найти ранг матрицы методом Жордана - Гаусса

$$A=\begin{pmatrix}1&4&3&2&1\\0&1&-1&-2&2\\2&9&5&2&4\\2&7&7&6&0\end{pmatrix}\underset{IV-2I}{\overset{III-2I}{\sim}}\begin{pmatrix}1&4&3&2&1\\0&1&-1&-2&2\\0&1&-1&-2&2\\0&-1&1&2&-2\end{pmatrix}\underset{IV+II}{\overset{III-II}{\sim}}$$

$$\underset{IV+II}{\overset{III-II}{\sim}}\begin{pmatrix}1&4&3&2&1\\0&1&-1&-2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{I-4II}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&7&10&-7\\0&1&-1&-2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{(*)}{\sim}$$

$$\overset{(*)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\quad \operatorname{rang}(A)=2\,.$$

(*) – хотя, здесь уже видно, что ранг матрицы А равен двум (см. ниже) для доказательства этого проведём ещё некоторые действия со столбцами: (III+V); (IV+V); (V-2III); (III-II); (3V+7IV); (IV-3I).

Ответ получен.

В принципе, задачу себе можно немного упростить и остановиться уже на той итерации, когда получается треугольная матрица. В этом случае говориться: ранг матрицы равен числу определённых неизвестных (в том смысле, что они определены).

Метод Крамера

Решение систем линейных алгебраических уравнений по методу Крамера.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \mathbf{K} \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}\text{, при } \Delta = \det(A) \neq 0\ ;$$

Пример: Решить систему уравнений методом Крамера

Найти все неизвестные системы методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = -6 \Rightarrow$$

Для того чтобы найти Δ_1 необходимо первый столбец в $\Delta = \det(A)$ заменить на B - матрицу столбец свободных членов уравнения. При нахождении Δ_2 нужно проделать ту же операцию, но уже со вторым столбцом исходного определителя. Δ_3 находится соответственно.

Из формулы Крамера следует, что дополнительных определителей придётся искать столько, сколько неизвестных в системе.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-6} = 0; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1\ .$$

Ответ получен.

Метод Гаусса

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом последовательного исключения неизвестных.

Элементарные преобразования*, применяемые по методу Гаусса (преобразования, приводящие к равносильной системе уравнений):*

a. *Умножение обеих частей уравнения на число не равное нулю.*
b. *Прибавление к одному уравнению другого, умноженного на любое число, не равное нулю.*
c. *Перестановка местами любых двух уравнений.*
d. *Отбрасывание нулевых строк.*

Элементарные преобразования обратимы.

Метод Гаусса состоит из двух этапов решения:

a. ***Прямой ход*** *– с помощью элементарных преобразований из расширенной матрицы получить треугольную матрицу, где над главной диагональю стоят все неизвестные системы, а под ней - нули.*
b. ***Обратный ход*** *– переход к равносильной системе уравнений и выражение всех неизвестных системы, начиная с последнего.*

Пример: Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases};$$

Прямой ход:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right) \underset{III+I}{\overset{II-2I}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{5II+7III}{\sim}$$

$$\overset{5II+7III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \underset{(-1)II}{\overset{\left(-\frac{1}{3}\right)III}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right);$$

Обратный ход:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ \quad 7x_2 + 2x_3 = -3 \\ \qquad\quad x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -1\ . \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Ответ получен.

Необходимо отметить, что во всех предыдущих методах решения систем линейных алгебраических уравнений от нас требовалось узнать определитель основной матрицы, что не всегда удобно (если определитель больше третьего порядка). В методе Гаусса имеет место автоматическая проверка на невырожденность матрицы. Если система имеет хотя бы одно решение, то определитель не равен нулю, а если в системе решений нет – матрица вырожденная.