Задание на исследователькую работу.

Тема: Локальные экспоненциальные сплайны (I, II, III). Аппросимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов.

Цели задания

Реализовать алгоритмы аппроксимации в одномерном и двухмерном случае для В-сплайнов следующих трёх типов:

$$B(x) = m \begin{cases} \dfrac{1}{\beta\gamma} + \dfrac{1}{\beta(\beta-\gamma)} e^{\beta(x+\frac{3h}{2})} + \dfrac{1}{\gamma(\gamma-\beta)} e^{\gamma(x+\frac{3h}{2})}, & x \in [-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}] \\ -\dfrac{e^{\beta h} + e^{\gamma h}}{\beta\gamma} + \dfrac{e^{\beta(x+\frac{h}{2})}(e^{\gamma h}+1)}{\beta(\gamma-\beta)} + \dfrac{e^{\gamma(x+\frac{h}{2})}(e^{\beta h}+1)}{\gamma(\beta-\gamma)}, & x \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \\ e^{(\beta+\gamma)h}\left[\dfrac{1}{\beta\gamma} + \dfrac{1}{\beta(\beta-\gamma)} e^{\beta(x-\frac{3h}{2})} + \dfrac{1}{\gamma(\gamma-\beta)} e^{\gamma(x-\frac{3h}{2})}\right], & x \in [\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}] \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$B(x) = m \begin{cases} \dfrac{e^{\beta(x+\frac{3h}{2})}-1}{\beta^2} - \dfrac{x+\frac{3h}{2}}{\beta}, & x \in [-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}] \\ \dfrac{e^{\beta h}+1}{\beta^2} + \dfrac{h}{2\beta}(e^{\beta h}-1) + \dfrac{x}{\beta}(e^{\beta h}+1) - \dfrac{2e^{\beta(x+\frac{h}{2})}}{\beta^2}, & x \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \\ e^{\beta h}\left(\dfrac{e^{\beta(x-\frac{3h}{2})}-1}{\beta^2} - \dfrac{x-\frac{3h}{2}}{\beta}\right), & x \in [\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}] \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$B(x) = m \begin{cases} \dfrac{1-e^{\beta(x+\frac{3h}{2})}}{\beta^2} + (x+\dfrac{3h}{2})\dfrac{e^{\beta(x+\frac{3h}{2})}}{\beta}, & x \in [-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}] \\ -\dfrac{2e^{\beta h}}{\beta^2} + \dfrac{e^{\beta(x+\frac{h}{2})}}{\beta}\left[\dfrac{1}{\beta}(e^{\beta h}+1) + \dfrac{h}{2}(e^{\beta h}-1)\right] - \dfrac{xe^{\beta(x+\frac{3h}{2})}(e^{\beta h}+1)}{\beta}, & x \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \\ e^{2\beta h}\left(\dfrac{1-e^{\beta(x-\frac{3h}{2})}}{\beta^2} + \dfrac{(x-\frac{3h}{2})}{\beta} e^{\beta(x-\frac{3h}{2})}\right), & x \in [\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}] \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

Локальный сплайн $S(x)$ имеет вид:

$$S(x) = y_{l-1}B(x-(l-1)h) + y_l B(x-lh) + y_{l+1}B(x-(l+1)h),$$

здесь $y_l = f((l+\varepsilon)h)$, где f - любая функция, заданная на всей числовой оси.

Выбор m и ε для каждого $B(x)$:

I. Число $\varepsilon \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Это единственный корень уравнения $e^{(\beta-\gamma)(\varepsilon-\frac{1}{2})h} = \frac{\beta(e^{\gamma h}-1)}{\gamma(e^{\beta h}-1)}$ на интервале $(-1/2, 1/2)$. Число m определяется так: $m = \frac{\beta(\beta-\gamma)}{e^{\beta(\varepsilon h-\frac{h}{2})}(e^{\beta h}-1)(e^{\beta h}-e^{\gamma h})}$.

II. Число $\varepsilon \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Это единственный корень уравнения $e^{\beta h(\varepsilon-\frac{1}{2})} - \frac{\beta h}{e^{\beta h}-1} = 0$ на интервале $(-1/2, 1/2)$. Число m определяется так: $m = \frac{\beta}{h(e^{\beta h}-1)}$.

III. Число $\varepsilon \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и находится по формуле: $\varepsilon = \frac{1}{\beta h} - \frac{1+e^{\beta h}}{2(e^{\beta h}-1)}$. Число m определяется так: $m = \frac{\beta}{he^{\beta h(\varepsilon+\frac{1}{2})}(e^{\beta h}-1)}$.

Реализации алгоритмов должны иметь возможность регулировать величины шага h, параметров β и γ, а также вид функции f.

Исследовать влияние величины β на форму $B-$сплайнов, а также на погрешность аппроксимации.

Реализовать алгоритм для одномерного случая аппроксимации локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов. В качестве исходных данных использовать одноимённую статью В. Т. Шевалдина. Реализация алгоритма должна иметь возможность регулировать расстояния между отдельными узлами.

Руководитель: ____________ (Шевалдин В. Т.)   Программист: ____________ (Мезенцев В. Н.)