Пределы

2004 г.
Андрей Ивашов

Примеры для решения

11. Пример: Решить предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+x-x^2}{\sqrt{3-x}-1};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x^2+x-1\right)}{\sqrt{5x^2+3x+1}-2x-1};$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+1}};$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{(6x-1)(2x+3)}{\sqrt{9x^6+1}+3x};$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(4x\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\right);$$

$$\lim_{x\to -1}\left(\operatorname{ctg}(x+1)-\frac{1}{\sin(x+1)}\right);$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3^x-9}{\ln(x-1)\ln(x+1)};$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(3^x-1\right)\cdot\ln\left(2-x^3\right)}{\sin(1-x)};$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2^{x^2+x}-4}{\ln(1+x)\left(\sqrt[5]{4x-3}-\sqrt[5]{x}\right)};$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(x\cdot\ln\left(\frac{2+x}{x}\right)\right);$$

Теоремы о пределах

Существуют ситуации, когда обычные теоремы о пределах не работают. Данные ситуации есть неопределённости, возникающие, если предел функции $f(x)$ в точке x_0 сводится к одному из следующих значений: $[0/0], [\infty/\infty], [0\cdot\infty], [\infty-\infty], [0^0], [1^\infty], [\infty^0]$. Стоит также иметь в виду, что на бесконечно-большие функции свойства связанные с действиями над пределами могут не распространяться.

1. *Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют как правый, так и левый пределы и они равны. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.*
2. *Предел суммы конечного числа функций равен сумме пределов слагаемых, если все эти пределы существуют.*
   $$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)$$
3. *Предел произведения конечного числа функций, имеющих пределы в точке x_0, равен произведению пределов сомножителей.*
   $$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)$$
4. *Предел постоянной функции равен самой постоянной.*
   $$\lim_{x\to x_0}C=C$$
5. *Предел частного двух функций, имеющих пределы в точке x_0, равен частному пределов если предел знаменателя не равен нулю.*
   $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)}$$ *, при* $\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0$
6. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела.*
   $$\lim_{x\to x_0}\left(C\cdot f(x)\right)=C\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)$$
7. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и функции $f(x)$, $h(x)$ имеют в точке x_0 предел, равный A, т.е.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2}\sin\frac{7x}{2}\cdot\cancel{\sin\frac{5x}{2}}}{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}}\frac{5x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{7x}{2}}{\sin\frac{5x}{2}}\overset{\text{э.б.м}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7\cancel{x}}{\cancel{2}}}{\frac{5\cancel{x}}{\cancel{2}}}=\frac{7}{5}.$$

9. Пример: Решить предел следующими способами: a) используя э.б.м.; b) по правилу Лопиталя; c) домножая на сопряженное.

a) $$\lim_{x\to 5}\frac{5x^2-26x+5}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+5}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{5x^2-26x+5}{\sqrt{x+5}\left(\sqrt{\frac{2x}{x+5}}-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{5x^2-26x+5}{\sqrt{x+5}\left(\sqrt{\frac{x-5}{x+5}+1}-1\right)}\overset{\text{Э.б.м}}{=}\lim_{x\to 5}\frac{5x^2-26x+5}{\sqrt{x+5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x-5}{x+5}}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2\cdot 5\left(x-\frac{1}{5}\right)\cancel{(x-5)}\sqrt{x+5}}{\cancel{(x-5)}}=\lim_{x\to 5}\left(2(5x-1)\sqrt{x+5}\right)=48\sqrt{10}\ ;$$

b) $$\lim_{x\to 5}\frac{5x^2-26x+5}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+5}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{п.Л.}}{=}\lim_{x\to 5}\frac{10x-26}{\frac{1}{\cancel{2}}(2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}-\frac{1}{2}(x+5)^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{10x-26}{\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{2\sqrt{x+5}}}=\lim_{x\to 5}\frac{10x-26}{\frac{2\sqrt{x+5}-\sqrt{2x}}{2\sqrt{2x}\sqrt{x+5}}}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(10x-26)\left(2\sqrt{2x}\sqrt{x+5}\right)}{2\sqrt{x+5}-\sqrt{2x}}=\frac{480}{\sqrt{10}}=48\sqrt{10}\ ;$$

c) $$\lim_{x\to 5}\frac{5x^2-26x+5}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+5}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{5\left(x-\frac{1}{5}\right)(x-5)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{x+5}\right)}{2x-x-5}=$$

$$\lim_{x\to 5}(5x-1)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{x+5}\right)=48\sqrt{10}\ .$$

Ответ получен.

10. Пример: Исследовать непрерывность

$$y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$$

Вычисление пределов

Решение задач на вычисление пределов целиком и полностью основано на школьной программе изучения математики. В простейшем случае в функцию предела достаточно подставить точку к которой стремится её переменная и вычислить ответ. В стандартных же заданиях перед этим ещё необходимо избавиться от неопределённости – ситуации, когда нет возможности использовать ни одну теорему о пределах и тем самым упростить функцию. Для этого были созданы всевозможные правила и теоремы, которые будут рассмотрены далее. А пока рассмотрим простейшие примеры пределов.

Пример: Решить предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4\ .$$

Ответ получен.

Как видно, в решении данных пределов нет ничего сложного и к ним не были применены никакие новые правила и формулы преобразования. Впоследствии же нам могут пригодится следующие преобразования: расширение дроби, домножение на сопряжённое, вынесение за скобку переменной в максимальной степени.

Все неопределённости описаны выше, некоторые из них можно привести к нужному нам виду используя следующие формулы преобразования:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right];$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\begin{bmatrix}[0/0]\\ [\infty/\infty]\end{bmatrix};$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\begin{bmatrix}\left[0^0\right]\\ \left[\infty^0\right]\\ \left[1^\infty\right]\end{bmatrix}=\lim e^{g(x)\cdot\ln f(x)}=\exp\lim_{x\to x_0}\left(g(x)\cdot\ln f(x)\right)=[0\cdot\infty].$$

Примеры с решениями

1. Пример: Решить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{x\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{0}}{\sqrt[4]{0+0}-1}=-1\,.$$

Ответ получен.

2. Пример: Решить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+1-x)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)=0\,.$$

Ответ получен.

3. Пример: Решить предел используя теоремы о пределах

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(16-\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt[5]{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(16-\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\sqrt[5]{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)\lim_{x\to\infty}\left(16-\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt[5]{\left(\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\left(\lim_{x\to\infty}16-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\sqrt[5]{(2+0)(16-0)}=\sqrt[5]{32}=2\,.$$

Ответ получен.

4. Пример: Решить предел используя правило Лопиталя

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]\overset{п.Л.}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{п.Л.}{=}$$

$$\overset{п.Л.}{=}\lim_{x\to0}\frac{-2\sin x\cos x}{1}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin 2x}{1}=0\,.$$

Ответ получен.

Эквивалентность бесконечно-малых

Рассмотрим две бесконечно-малые, это функции $a(x)$ и $b(x)$, бесконечно-малые при $x\to x_0$. Теперь если две эти функции ещё и эквивалентны, то при решении пределов мы можем заменять их друг на друга не боясь совершить ошибку. Чтобы выяснить являются ли они эквивалентными необходимо найти предел их отношения.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{a(x)}{b(x)}=\begin{cases}1 & \Rightarrow\ a(x)\ \textit{и}\ b(x)\ \textit{эквивалентны};\\ const\neq0 & \Rightarrow\ a(x)\ \textit{и}\ b(x)\ \textit{одного порядка малости};\\ 0 & \Rightarrow\ a(x)\ \textit{более высокого порядка, чем}\ b(x);\\ \infty & \Rightarrow\ b(x)\ \textit{более высокого порядка, чем}\ a(x).\end{cases}$$

Существует известная таблица уже определённых эквивалентностей. При $x\to0$:

$\sin x \sim x$;

$\operatorname{tg} x \sim x$;

$\ln(1+x) \sim x$;

$e^x-1 \sim x$;

$\arcsin x \sim x$;

$\operatorname{arctg} x \sim x$;

$\frac{a^x-1}{\ln a} \sim x \ \Rightarrow\ \left(a^x-1\right) \sim x\cdot\ln a$;

$\frac{(1+x)^m-1}{m} \sim x \ \Rightarrow\ \left((1+x)^m-1\right) \sim x\cdot m$.

Данная таблица эквивалентностей бесконечно-малых действительна <u>только</u> если $x\to0$, где x - функция.

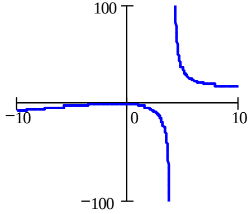
Одна из самых распространённых ошибок это использование эквивалентностей для упрощения отдельных членов суммы или разности. Помните, что их можно применять лишь если заменяемый член является элементом произведения.

Пример: Исследовать непрерывность

$$y=\frac{x^2+8}{x-4}$$

$Df(x):\ x\neq 4$.

Рассмотрим точку $x=4$:



$$\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2+8}{x-4}=-\infty\ ;\ \lim_{x\to 4^+}\frac{x^2+8}{x-4}=+\infty\ ;$$

$$y(4)=\nexists$$

$\Rightarrow$ *В точке* $x=4$ *функция терпит разрыв II-го рода.*

Ответ получен.

Асимптоты

Асимптотой кривой, имеющей бесконечную ветвь называется прямая, обладающая следующим свойством: расстояние от точки кривой до прямой стремиться к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат на бесконечной ветви. Ну а кривая имеет бесконечную ветвь, если координаты её точек могут неограниченно возрастать по абсолютной величине. Заметим, что не каждая кривая с бесконечной ветвью имеет асимптоты.

Вертикальные асимптоты

$\lim\limits_{x\to a} y(x)=\pm\infty$ *, где* a *- точка разрыва II-го рода.*

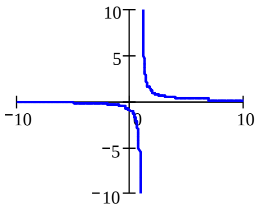
(Рассматривать необходимо не саму точку, а её окрестности, т.е. два односторонних предела.)

Следовательно вертикальная асимптота проходит через точку бесконечного разрыва, либо на границе области определения.

Пример: Найти вертикальные асимптоты

$$y=\frac{1}{x-1}$$

$Df(x):\ x\neq 1$.



$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty\ ;$$

$\Rightarrow$ $x=1$ *- вертикальная двусторонняя асимптота.*

Ответ получен.

Замечательные (классические) пределы

Данные пределы также называются табличными и используются для упрощения решения пределов. Мы рассмотрим самые распространённые из них. Большинство пределов, решаемых с помощью замечательных пределов, можно, также, решить и с помощью эквивалентностей бесконечно-малых.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$;

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=e^a \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{ax}=e^a \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{a}{x}}=e^a$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$;

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$;

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x!}{x^x\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{x}}=\sqrt{2p}$;

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2x)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2x-1)}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2x}=\dfrac{p}{2}$.

Пример: Решить предел используя классические пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin 4x}{4\cdot x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\overset{К.п.}{=}4\lim_{x\to 0}1=4\,.$$

Ответ получен.

Содержание

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$. *Пусть, кроме того, выполняется неравенство* $f(x) < g(x) < h(x)$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

Всегда, прежде чем упрощать предел функции нужно обязательно проверить его на неопределённость.

<u>Определения</u>

1. *Число* A *называется пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$, *если для любой сходящейся к* x_0 *последовательности* $(x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n, \mathbf{K})$ *значений аргумента* x, *отличных от* x_0, *соответствующая последовательность* $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \mathbf{K}, f(x_n), \mathbf{K})$ *значений функции сходится к числу* A.
2. *Число* A *называется пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$, *если для любого числа* $e > 0$ *существует число* $d > 0$ *такое, что для всех* $x \in X$, $x \neq x_0$, *удовлетворяющих неравенству* $|x - x_0| < d$, *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < e$.
3. *Число* A *называется правым (левым) пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, *если для любой сходящейся к* x_0 *последовательности* $(x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n, \mathbf{K})$, *элементы* x_n *которой больше (меньше)* x_0, *соответствующая последовательность* $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \mathbf{K}, f(x_n), \mathbf{K})$ *сходится к* A.
4. *Число* A *называется пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, *если для любой бесконечно большой последовательности* $(x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n, \mathbf{K})$ *значений аргумента соответствующая последовательность* $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \mathbf{K}, f(x_n), \mathbf{K})$ *значений функции сходиться к* A.

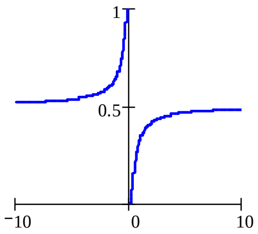
$Df(x):\quad x \neq 0$;

Рассмотрим точку $x = 0$ *:*

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0;$$

$y(0) = \not\exists$; *(разрыв II-го рода).*



$\Rightarrow$ *Функция непрерывна на* $x \in (-\infty; 0)\,\mathbf{U}\,(0; +\infty)$, *в точке* $x = 0$ – *разрыв II-го рода.*

Ответ получен.

Золотая теорема

Данная теорема – теорема об отношении многочленов.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots}{b_0x^l+b_1x^{l-1}+\ldots}=\begin{cases}k>l & \Rightarrow \quad \infty;\\ k=l & \Rightarrow \quad \dfrac{a_0}{b_0};\\ k<l & \Rightarrow \quad 0.\end{cases}$$

Пример: Решить предел по золотой теореме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-4\right)\left(x+1\right)}{\left(2x+3\right)\left(2x^2-16\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{З.т.}{=}\frac{1}{4}.$$

Ответ получен.

Однако хочу предостеречь вас от повсеместного использования такой замечательной теоремы на практике. Дело в том, что далеко не в каждом ВУЗе её проходят в базовой программе, вследствие чего, вы вполне можете получить конфликт с вашим преподавателем.

Правило Лопиталя

Правило Лопиталя есть метод раскрытия неопределённостей вида $[0/0]$ *и* $[\infty/\infty]$. *Используется для решения пределов сводящихся именно к этим неопределённостям. Суть его в нахождении производных функций числителя и знаменателя (отдельно) и получения эквивалентного предела.*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{bmatrix}[0/0]\\ [\infty/\infty]\end{bmatrix}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Стоит помнить, что если предел отношения производных не существует, то это ещё не значит, что не существует предел данного отношения, в этом случае приходиться отказаться от правила Лопиталя и решать предел другими способами. Иногда есть необходимость в многократном применении правила Лопиталя, но здесь необходимо не забывать проверять неопределённость после каждой итерации.

Пример: Решить предел используя правило Лопиталя

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{п.Л.}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{п.Л.}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ответ получен.

5. *Пример: Решить предел используя классические пределы*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x^2}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\right)^x\overset{К.п.}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(e^2\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty.$$

Ответ получен.

6. *Пример: Найти производную используя её определение*

$$y=\ln\left(x^2-1\right)$$

1) $y(x)=\ln\left(x^2-1\right)$;

2) $y\left(x+\Delta x\right)=\ln\left(\left(x+\Delta x\right)^2-1\right)$;

3) $$\Delta y=\ln\left(\left(x+\Delta x\right)^2-1\right)-\ln\left(x^2-1\right)=\ln\frac{\left(x+\Delta x\right)^2-1}{x^2-1}=$$

$$=\ln\left(\left(\frac{\left(x+\Delta x\right)^2-1}{x^2-1}-1\right)+1\right)=\ln\left(\frac{\Delta x\left(2x+\Delta x\right)}{x^2-1}+1\right);$$

4) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln\left(\dfrac{\Delta x\left(2x+\Delta x\right)}{x^2-1}+1\right)}{\Delta x};$$

5) $$y'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\ln\left(\dfrac{\Delta x\left(2x+\Delta x\right)}{x^2-1}+1\right)}{\Delta x}\overset{Э.б.м}{=}\lim_{\Delta x\to0}\frac{\dfrac{\cancel{\Delta x}\left(2x+\Delta x\right)}{x^2-1}}{\cancel{\Delta x}}=\frac{2x}{x^2-1}.$$

Ответ получен.

7. *Пример: Решить предел используя э.б.м.*

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^{bx}\left(e^{ax-bx}-1\right)}{x}\overset{Э.б.м}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^{bx}\left(ax-bx\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(e^{bx}\left(a-b\right)\right)=a-b.$$

Ответ получен.

8. *Пример: Решить предел используя э.б.м.*

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(6x)}{1-\cos(5x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\langle\begin{matrix}\cos x-\cos(6x)=-2\sin\dfrac{7x}{2}\cdot\sin\dfrac{-5x}{2}\\ 1-\cos(5x)=2\sin^2\dfrac{5x}{2}\end{matrix}\right\rangle=$$

Пример: Решить предел используя э.б.м.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{э.б.м}{=}\lim_{x\to0}\frac{4x}{x}=4\ .$$

Ответ получен.

Следует не забывать, что в приведённой выше таблице эквивалентностей x является функцией, а функция в свою очередь зависима от переменной, через которую она выражена. Отсюда – сама переменная функции может стремиться к чему угодно и не обязательно к нулю. Разберём это на конкретном примере.

Пример: Решить предел используя э.б.м.

$$\lim_{x\to3}\frac{\ln(6+x)-\ln 9}{\sin(2x-1)-\sin 5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{\ln\frac{6+x}{9}}{2\sin\frac{2x-1-5}{2}\cdot\cos\frac{2x-1+5}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\ln\frac{9-3+x}{9}}{2\sin(x-3)\cdot\cos(x+2)}=\lim_{x\to3}\frac{\ln\left(1+\frac{x-3}{9}\right)}{2\sin(x-3)\cdot\cos(x+2)}\overset{э.б.м}{=}\ (*)$$

$$\overset{э.б.м}{=}\lim_{x\to3}\frac{\frac{x-3}{9}}{2(x-3)\cdot\cos(x+2)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{18\cos(x+2)}=\frac{1}{18\cos 5}\ .$$

(*) – Т.к. при $x\to3$, $\frac{x-3}{9}\to0$ имеем полное право применять эквиваленты бесконечно малых для решения этого предела.

Ответ получен.

<u>Наклонные (горизонтальные) асимптоты</u>

Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной. При достижении наклонной асимптоты график функции может неопределённое количество раз пересекать её.

$y=kx+b$;

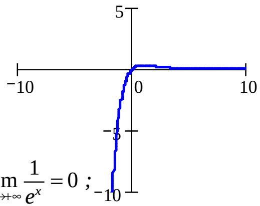
где $k_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Если k и b существуют и не равны ∞, то наклонная (горизонтальная) асимптота существует и находится по формуле уравнения прямой ($y=kx+b$). В противном случае наклонной асимптоты нет.

Пример: Найти наклонные асимптоты

$y=\frac{x}{e^x}$

$Df(x):\ x\in R$.



$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x\cdot x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\ ;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{п.Л.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\ ;$$

$\Rightarrow$ *При* $x\to+\infty$, $y=0$ *- горизонтальная асимптота.*

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x\cdot x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty\ ;$$

$\Rightarrow$ *При* $x\to-\infty$ *, асимптот нет.*

Ответ получен.

Нахождение производной

Вычислить производную функции можно не только с помощью уже знакомых нам формул производных основных функций, но и используя само определения производной, ключевую роль в которой играют пределы.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Дабы упростить пользование этой формулой был предложен следующий алгоритм, состоящий из пяти шагов:

1. $y=y(x)$ *- фиксируем переменную;*
2. $y(x+\Delta x)$ *- задаём* Δx *;*
3. $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$ *- составляем разность;*
4. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *- составляем отношение;*

(На этом этапе выгодно попытаться упростить выражение с учетом того, что оно будет использоваться в пределе и решаться через эквиваленты бесконечно-малых.)

5. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *- находим производную (решаем предел).*

Ну а теперь, после получения ответа, ничто не мешает нам сделать проверку, найдя производную функции более распространённым способом – по основным формулам производных функций.

Пример: Найти производную используя её определение

$y=5x+3$

1. $y(x)=5x+3$ *;*
2. $y(x+\Delta x)=5(x+\Delta x)+3=5x+5\Delta x+3$ *;*
3. $\Delta y=5x+5\Delta x+3-5x-3=5\Delta x$ *;*
4. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{5\Delta x}{\Delta x}=5$ *;*
5. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}5=5$.

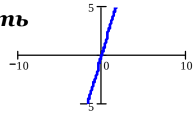
Ответ получен.

Непрерывность функции

Функция непрерывна на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Рассмотрения заслуживают лишь точки выделяющиеся по $Df(x)$ *и те, что выделены в задании. Если таких несколько, то и рассматривать их необходимо по отдельности, однако если* $Df(x)$ *определена функция уже не является непрерывной и необходимо лишь определить род разрыва в каждой их этих точек.*

- *Функция непрерывна если* $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.
- *Разрыв I-го (первого) рода функция терпит в точке* x_0 *, если* $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, $f(x_0)$ *существуют,но не равны.*
- *Разрыв II-го (второго) рода функция терпит в точке* x_0 *, если хотя бы один из* $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ *и* $f(x_0)$ *не существует, или равен* $\pm\infty$.

Пример: Исследовать непрерывность



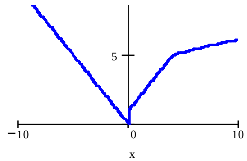
$y=3x$

$Df(x):\ x\in R\ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *функция непрерывна.*

Ответ получен.

Пример: Исследовать непрерывность



$$y=\begin{cases}-x & \text{при } x\le 0;\\ x+1 & \text{при } 0<x\le 4;\\ \sqrt{x}+3 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

$Df(x):\ x\ge 0$.

Рассмотрим точку $x=0$ *:*

$\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0;\quad \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1;\quad y(0)=0$ *(разрыв I-го рода).*

Рассмотрим точку $x=4$ *:*

$\lim\limits_{x\to 4^-}(x+1)=5;\quad \lim\limits_{x\to 4^+}(\sqrt{x}+3)=5;\quad y(4)=5$ *(непрерывна).*

$\Rightarrow$ *Функция непрерывна на* $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ *, в точке* $x=0$ *– разрыв I-го рода.*

Ответ получен.