

Пояснительная записка к плагину для MathCAD bqmcad.

Автор: Евгений Каратаев

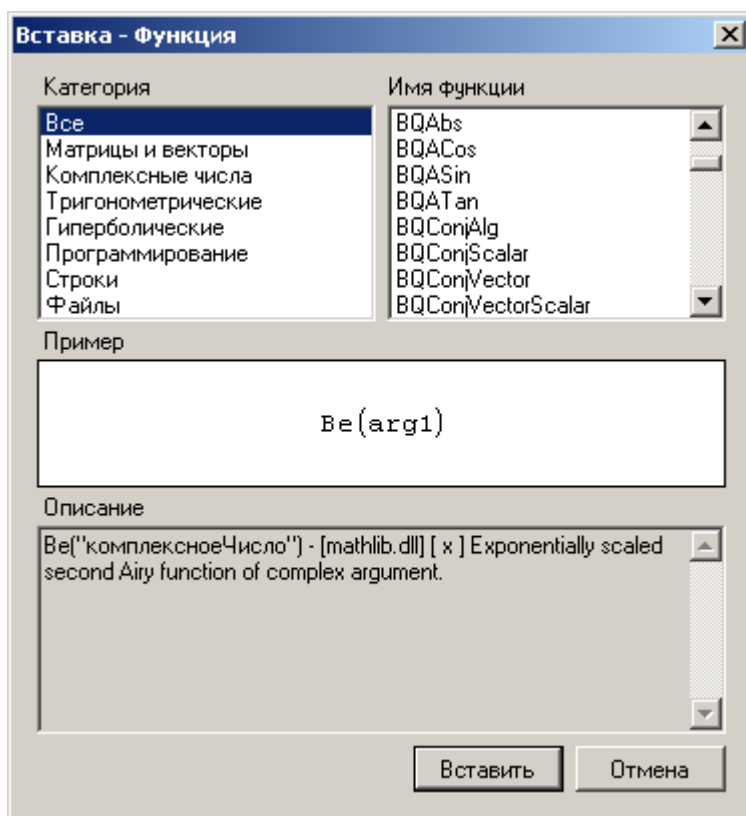
Сайт: <http://karataev.nm.ru/bqmcad/bqmcadru.html>

О пользовании плагином.

Плагин выполнен в виде библиотеки dll, которую следует разместить в подкаталоге userref1 каталога установки MathCAD. При следующем запуске пакета плагин будет загружен в память и инициализирован. При его инициализации в список доступных функций MathCAD добавляются функции работы с бикватернионами.

Для удаления плагина следует остановить работу пакета MathCAD и удалить файл bqmcad.dll. При следующем старте пакета функции этого плагина будут недоступны.

Для использования функций плагина следует вставить их вызов в тексте MathCAD. Можно вставлять как текст, набранный вручную, так и выбрав из списка имеющихся функций, нажав Ctrl+F. В этом списке, при наборе имени искомой функции, происходит инкрементное позиционирование на ближайшее имя. Функции плагина имеют префикс BQ, поэтому их легко найти в этом списке.



Пример такого окна приведен на рисунке.

В силу того, что MathCAD в настоящее время поддерживает из чисел только комплексные числа (действительные рассматривает как часть комплексного числа), то полноценно реализовать более мерные числа не представляется возможным, поэтому я выбрал представление бикватерниона в виде матрицы – строки. Примерно в виде строк, с упорядочением их коэффициентов я и представляю запись бикватерниона. Если бикватернион обозначать в виде

$$p = p_0 + i i p_1 + i j p_2 + i i p_3 + i p_4 + i p_5 + j p_6 + k p_7$$

то именно в этом порядке будут присутствовать коэффициенты в строке матрицы пакета MathCAD. Таким образом, данный плагин может быть использован для оперирования бикватернионами, кватернионами и бикомплексными числами путем приравнивания нулю неиспользуемого подмножества коэффициентов.

#### Извлечение корней из матрицы.

Этот пример показывает способ использования плагина bqmcad в целях отыскания корней квадратной матрицы второго порядка. Если требуется отыскание корня второго порядка, можно использовать встроенную функцию BQSqrt. Если требуется корень другого порядка, то можно использовать комбинацию логарифмирования и потенцирования.

Решение отыскивается по формуле:  $x^{\text{pow}} := \exp(\text{pow} \cdot \ln(x))$

Решение в MathCAD выглядит следующим образом:

$$x := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{pow} := \frac{1}{3}$$

$$x_{\text{root}} := \text{BQtoM2}(\text{BQExp}(\text{pow} \cdot \text{BQLn}(\text{BQfromM2}(x))))$$

$$x_{\text{root}} = \begin{pmatrix} 0,81 - 0,39 \cdot i & 0,64 + 0,22 \cdot i \\ 0,85 + 0,3 \cdot i & 1,45 - 0,17 \cdot i \end{pmatrix}$$

$$x_{\text{root}} \cdot x_{\text{root}} \cdot x_{\text{root}} = \begin{pmatrix} 2 - 5,43 \cdot 10^{-15} \cdot i & 3 - 8,25 \cdot 10^{-15} \cdot i \\ 4 - 1,69 \cdot 10^{-14} \cdot i & 5 - 1,63 \cdot 10^{-14} \cdot i \end{pmatrix}$$

Здесь приводится пример вычисления корня третьей степени. Применяется перевод матрицы в бикватернион и проводятся вычисления с бикватернионом, после чего результат переводится обратно в матрицу. В последней строке проверяется, что мы действительно нашли один из корней матрицы. Как уже указывалось ранее, текущая версия плагина находит только один из корней. Если требуется отыскание всего набора корней, то плагин понадобится соответствующим образом модифицировать.

#### Отыскание результирующего поворота.

Положим, проводятся последовательно два преобразования вращения вокруг различных направлений на различные величины углов. Требуется найти угол и направление результирующего поворота.

Обозначим исходные углы как alpha1 и alpha2. Тогда операторы поворота примут вид:

$$p' = \exp(\alpha 2 / 2) \exp(\alpha 1 / 2) p \exp(-\alpha 1 / 2) \exp(-\alpha 2 / 2)$$

или

$$p' = \exp(\alpha 3 / 2) p \exp(-\alpha 3 / 2)$$

Таким образом, угол результирующего поворота вычисляется как

$$\alpha 3 = 2 * \ln(\exp(\alpha 2 / 2) \exp(\alpha 1 / 2))$$

Решение выглядит таким образом:

$\alpha_1 := \text{BQCreate}(0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,2; 0; 0)$

$\alpha_2 := \text{BQCreate}(0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,4; 0)$

$\alpha_3 := 2 \cdot \text{BQln}\left(\text{BQMult}\left(\text{BQExp}\left(\frac{\alpha_1}{2}\right); \text{BQExp}\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)\right)\right)$

$\alpha_3 = \left(2,22 \cdot 10^{-15} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,2 \ 0,4 \ 4 \cdot 10^{-2}\right)$

Исходные и результирующие углы задаются в радианах.

Подставляя в исходные данные новые значения, можем получить немедленный ответ, поскольку пакет MathCAD автоматически пересчитывает значения, зависящие от измененных данных. В тех случаях, когда нужно проверить некую гипотезу или оценить величины, это весьма удобно.

Конечно, можно расписать то же самое в аналитической форме, но получится большое нагромождение формул, за которыми увидеть то, что интересует, довольно сложно.

Вычисление величины прецессии Томаса.

Этот пример показывает возможность численного определения величины прецессии Томаса. Положим, что совершается одно преобразование системы отсчета, являющееся преобразованием Лоренца, после которого совершается второе преобразование Лоренца с неколлинеарным первому направлением. Результирующее преобразование уже не будет являться в чистом виде преобразованием движения, и будет содержать также поворот.

Обозначим первое преобразование как  $u_1$ , второе как  $u_2$ . Их произведение, обозначенное как  $u_3$ , будет являться произведением преобразования движения  $u$  и преобразованием вращения  $v$ :

$$\begin{aligned} u_3 &:= u_2 \cdot u_1 \\ u_3 &:= u \cdot v \end{aligned}$$

Умножив  $u_3$  на скалярно-векторно сопряженный оператор, получим:

$$u_3 \cdot \tilde{u}_3' = u \cdot v \cdot \tilde{v}' \cdot \tilde{u}'$$

Учитывая, что для преобразований движения  $u = \tilde{u}'$

а для преобразований вращения  $\tilde{v}' = \tilde{v} = \tilde{v}$

получим, что  $u_3 \cdot \tilde{u}_3' = u^2$

таким образом,  $u = \sqrt{u_3 \tilde{u}_3'}$   $v = u^{-1} \cdot u_3$

Решение в пакете MathCAD приведено на картинке.

Здесь исходные скорости задаются в метрах в секунду.

$c := 300000000$

$s1 := 10000000$

s2:= 20000000

$$u1:= \text{BQExp} \left( \text{BQCreate} \left( 0; \frac{\text{arth} \left( \frac{s1}{c} \right)}{2}; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0 \right) \right)$$

$$u2:= \text{BQExp} \left( \text{BQCreate} \left( 0; 0; \frac{\text{arth} \left( \frac{s2}{c} \right)}{2}; 0; 0; 0; 0; 0; 0 \right) \right)$$

u3:= BQMult (u2 ; u1)

u:= BQSqrt (BQMult (u3 ; BQConjVectorScalar(3)))

v:= BQMult (BQNeg(u) ; u3)

Vrot:= 2·BQLn(v)

$$Vrot = \begin{pmatrix} 2,66 \cdot 10^{-15} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 9,71 \cdot 10^{-17} & 1,54 \cdot 10^{-35} & 1,71 \cdot 10^{-19} & -2,33 \cdot 10^{-22} & 1,81 \cdot 10^{-21} & 1,11 \cdot 10^{-21} \\ 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,66 \cdot 10^{-15} & -9,71 \cdot 10^{-17} & -1,54 \cdot 10^{-35} & -1,71 \cdot 10^{-19} & 2,33 \cdot 10^{-22} & -1,81 \cdot 10^{-21} & -1,11 \cdot 10^{-21} \\ 9,71 \cdot 10^{-17} & -9,71 \cdot 10^{-17} & 2,66 \cdot 10^{-15} & -2,01 \cdot 10^{-17} & -2,01 \cdot 10^{-17} & -2,01 \cdot 10^{-17} & -2,01 \cdot 10^{-17} & -2,01 \cdot 10^{-17} \\ 1,54 \cdot 10^{-35} & -1,54 \cdot 10^{-35} & -2,01 \cdot 10^{-17} & 2,66 \cdot 10^{-15} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} \\ 1,71 \cdot 10^{-19} & -1,71 \cdot 10^{-19} & -2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,66 \cdot 10^{-15} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} \\ -2,33 \cdot 10^{-22} & 2,33 \cdot 10^{-22} & -2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,66 \cdot 10^{-15} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} \\ 1,81 \cdot 10^{-21} & -1,81 \cdot 10^{-21} & -2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,66 \cdot 10^{-15} & 2,01 \cdot 10^{-17} \\ 1,11 \cdot 10^{-21} & -1,11 \cdot 10^{-21} & -2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,01 \cdot 10^{-17} & 2,66 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$$

$$Vrot_{18} = 6,38 \cdot 10^{-2} \text{ deg}$$

Здесь полученные углы выражены в радианах. В приведенном примере скорость первого преобразования – 10 тысяч километров в секунду, второго – 20 тысяч. Прецессия Томаса составляет, таким образом, 64 тысячных градуса. Конечно, величина весьма незначительна, но ненулевая.