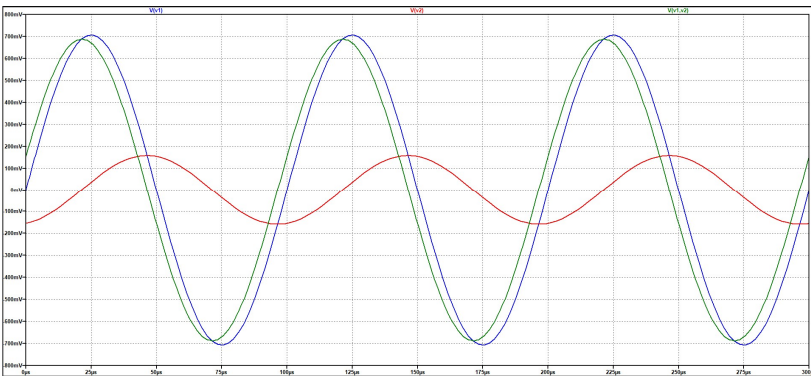
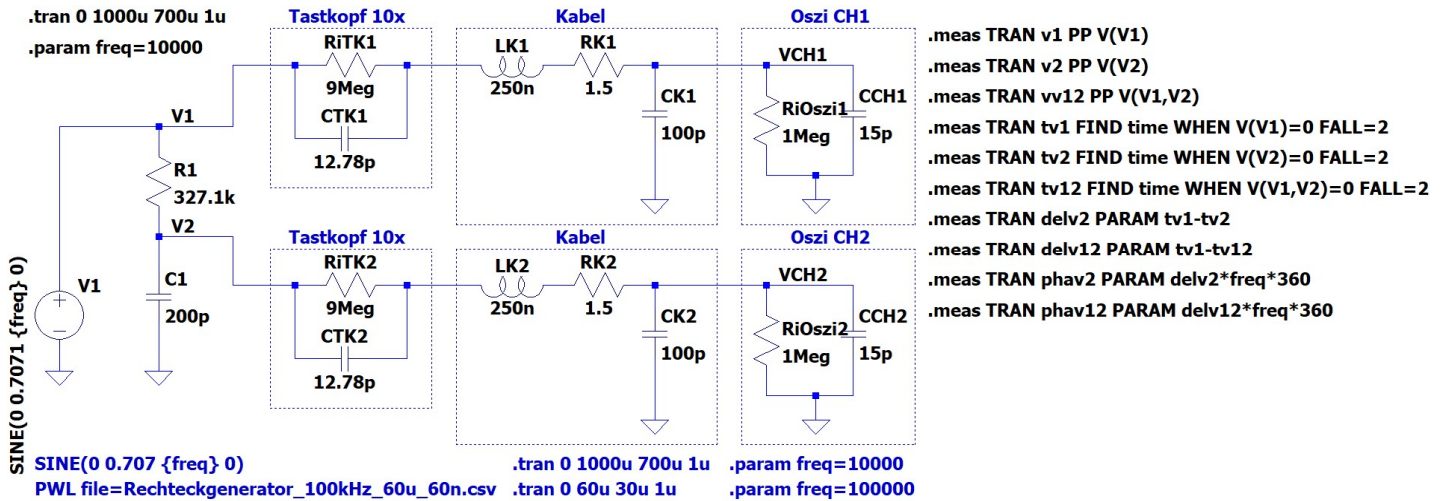


## Versuch mit R und C Sinus

Mit diesem Messaufbau sollen sich Kondensatoren mit kleinen Induktivitäten - die mit einem Multimeter üblicherweise nicht mehr gemessen werden können - messen lassen. Bei ersten Messungen hat sich gezeigt, dass der ermittelte Induktivitätswert für C1 mit der Wahl von Frequenz und Widerstand R1 stark variieren. Daher wollte ich hier die Beeinflussung der Messung durch die Messmittel berücksichtigen.

Hier zunächst die Ergebnisse einer Simulation mit LTSpice.



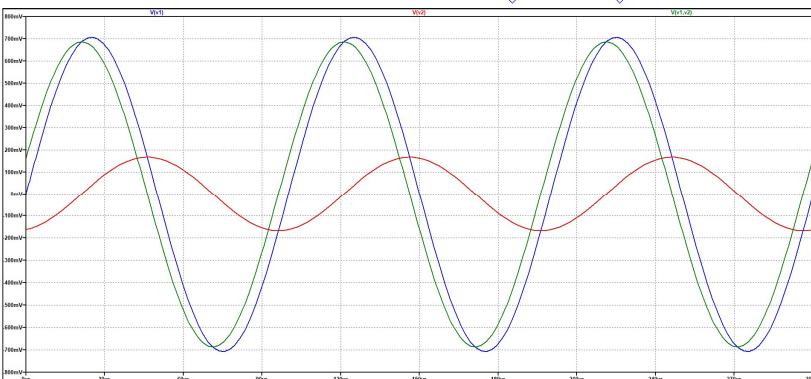
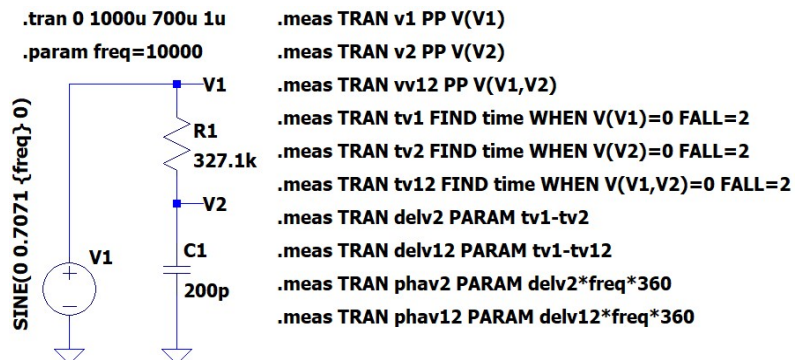
Daten aus LTSpice:

```

v1: PP(V(V1))=1.41350221634
v2: PP(V(V2))=0.316045507789
vv12: PP(V(V1,V2))=1.3759458845
tv1: time=0.000150000493801
tv2: time=0.000171288516085
tv12: time=0.000146408671592
delv2: tv1-tv2=-2.12880222835e-05
delv12: tv1-tv12=3.59182220977e-06
phav2: delv2*freq*360=-76.6368802207
phav12: delv12*freq*360=12.9305599552

```

Ohne Berücksichtigung von Oszi und Tastköpfen giebt sich dies:



Simulation results for the simplified circuit:

```

v1: PP(V(V1))=1.41350221634
v2: PP(V(V2))=0.333872467279
vv12: PP(V(V1,V2))=1.3739086478
tv1: time=0.000150000493801
tv2: time=0.000171202625627
tv12: time=0.000146203374956
delv2: tv1-tv2=-2.12021318259e-05
delv12: tv1-tv12=3.79711884542e-06
phav2: delv2*freq*360=-76.3276745733
phav12: delv12*freq*360=13.6696278435

```

Eingabedaten:

$$\begin{aligned}
 R1 &:= 327,1 \text{ k}\Omega & RiTK &:= 9 \text{ M}\Omega & RK &:= 1,5 \Omega & RiOszi &:= 1 \text{ M}\Omega \\
 C1 &:= 200 \text{ pF} & ZC1(f) &:= \frac{-i}{\omega 0(f) \cdot C1} & CK &:= 100 \text{ pF} & ZCK(f) &:= \frac{-i}{\omega 0(f) \cdot CK} \\
 CTK &:= 12,78 \text{ pF} & ZCTK(f) &:= \frac{-i}{\omega 0(f) \cdot CTK} & CCH &:= 15 \text{ pF} & ZCCH(f) &:= \frac{-i}{\omega 0(f) \cdot CCH} \\
 LK &:= 250 \text{ nH} & ZLK(f) &:= i \cdot \omega 0(f) \cdot LK & & & & 
 \end{aligned}$$

Sinus-Schwingung aus einem Signalgenerator, bzw. von einem Computer mit einem externen USB-Audio-Interface (steinberg UR22C, 192 kHz Samplingrate, 24-Bit) erzeugt. Der Winkel  $\varphi_V$  ist zu  $-90^\circ$  gewählt, damit die Schwingung derra LTspice-Simulation entsprechend liegt.

$$\begin{aligned}
 \omega 0(f) &:= 2 \cdot \pi \cdot f & V1pp &:= \sqrt{2} \text{ V} = 1,4142 \text{ V} & \varphi_V &:= -90^\circ \\
 V1(t; f) &:= \frac{V1pp}{2} \cdot e^{i \cdot (\omega 0(f) \cdot t + \varphi_V)}
 \end{aligned}$$

Zusammenstellung der Übertragungsfunktionen:

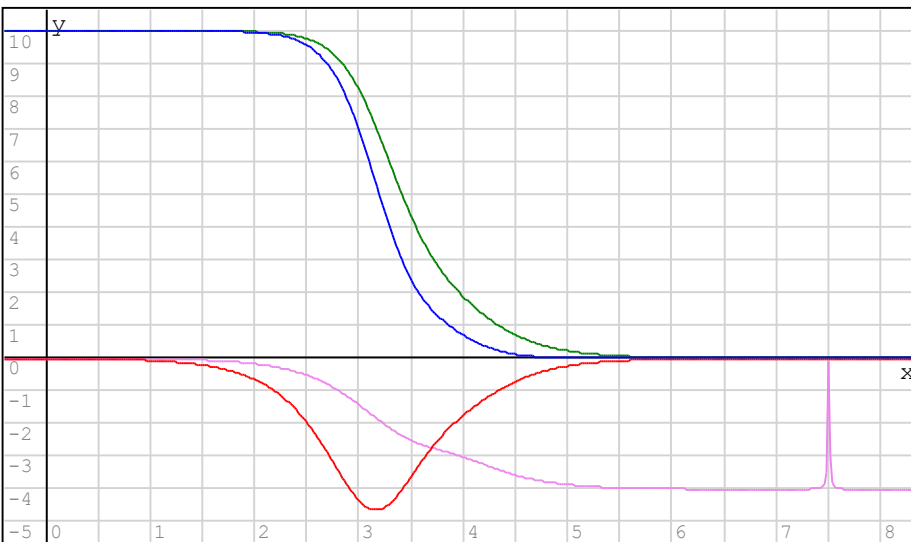
$$\begin{aligned}
 ZOsz_i(f) &:= \frac{RiOszi \cdot ZCCH(f)}{RiOszi + ZCCH(f)} & ZK(f) &:= \frac{(RK + ZLK(f)) \cdot ZCK(f)}{RK + ZLK(f) + ZCK(f)} \\
 ZTK(f) &:= \frac{RiTK \cdot ZCTK(f)}{RiTK + ZCTK(f)} & ZCH(f) &:= ZOsz_i(f) + ZK(f) + ZTK(f) \\
 Zgesamt(f) &:= R1 + \frac{ZC1(f) \cdot ZCH(f)}{ZC1(f) + ZCH(f)}
 \end{aligned}$$

Die Größe "ZCH" ist nur abhängig von Frequenz, Oszi, Kabel und Tastköpfen, also unabhängig von R1 und C1!

$$ZCH(f) := \frac{RiOszi \cdot ZCCH(f)}{RiOszi + ZCCH(f)} + \frac{(RK + ZLK(f)) \cdot ZCK(f)}{RK + ZLK(f) + ZCK(f)} + \frac{RiTK \cdot ZCTK(f)}{RiTK + ZCTK(f)}$$

Es gilt: (bei gegebenem V1zV2 und R1, lässt sich ZC1 und damit C1 berechnen!)

$$\begin{aligned}
 V2zV1(f) &:= \frac{ZC1(f) \cdot ZCH(f)}{R1 \cdot (ZC1(f) + ZCH(f)) + ZC1(f) \cdot ZCH(f)} & V2(t; f) &:= (V1(t; f) \cdot V2zV1(f))
 \end{aligned}$$



Unstetigkeit bei  $x = 7,5$  ?

$$\begin{aligned}
 \arg(ZCH(10^7 \text{ Hz})) &= -1,5694 \\
 \arg(ZCH(10^{7,5} \text{ Hz})) &= -0,1121 \\
 \arg(ZCH(10^8 \text{ Hz})) &= -1,5707
 \end{aligned}$$

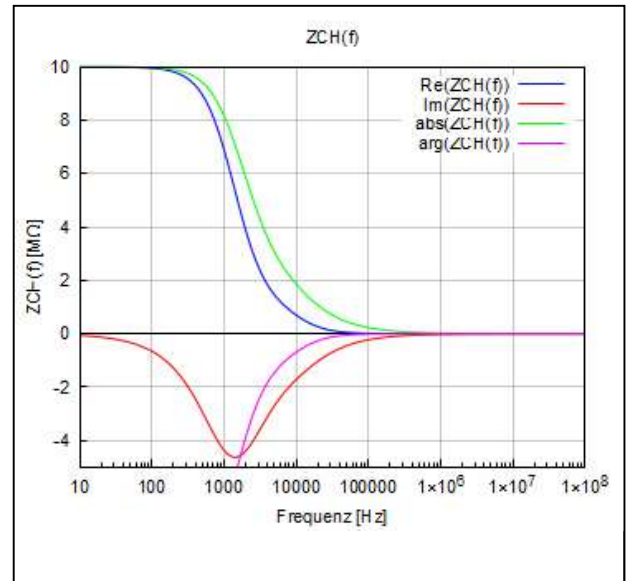
Bei welcher Frequenz ist  $ZCH = 5$  ?

$$\begin{aligned}
 \text{Re}(ZCH(1500 \text{ Hz})) &= 5118,0751 \text{ k}\Omega \\
 \text{Re}(ZCH(1540 \text{ Hz})) &= 4999,6537 \text{ k}\Omega \\
 \text{Re}(ZCH(1600 \text{ Hz})) &= 4828,7825 \text{ k}\Omega
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 \text{Re}(ZCH(10^x \text{ Hz})) \text{ M}\Omega^{-1} \\
 \text{Im}(ZCH(10^x \text{ Hz})) \text{ M}\Omega^{-1} \\
 |ZCH(10^x \text{ Hz})| \text{ M}\Omega^{-1} \\
 \arg(ZCH(10^x \text{ Hz})) \cdot 8 \cdot \pi^{-1}
 \end{cases}$$

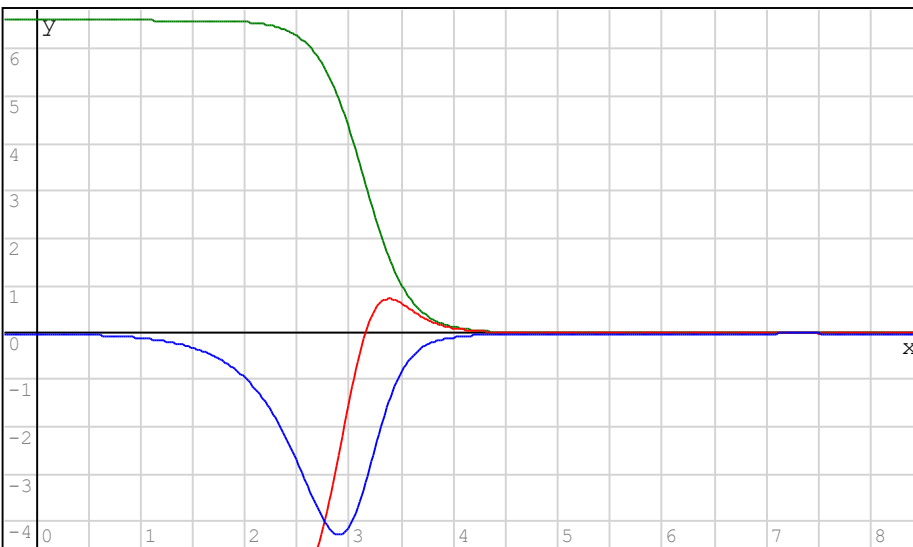
```

xlabel = "Frequenz [Hz]"
ylabel = "ZCH(f) [MΩ]"
logx = true
xrange = { 10
           10^8 }
yrange = { -5
           10 }
key = "Re(ZCH(f))"
color = blue
plot := explicit (Re(ZCH(x Hz)) MΩ^-1; x; 10; 10^8)
key = "Im(ZCH(f))"
color = red
explicit (Im(ZCH(x Hz)) MΩ^-1; x; 10; 10^8)
key = "abs(ZCH(f))"
color = green
explicit (|ZCH(x Hz)| MΩ^-1; x; 10; 10^8)
key = "arg(ZCH(f))"
color = magenta
explicit (8 * arg(ZCH(x Hz)) * π^-1; x; 10; 10^8) plot
    
```



Ableitung von ZCH(f)

$$dZCH(f) := \frac{d}{df} ZCH(f)$$



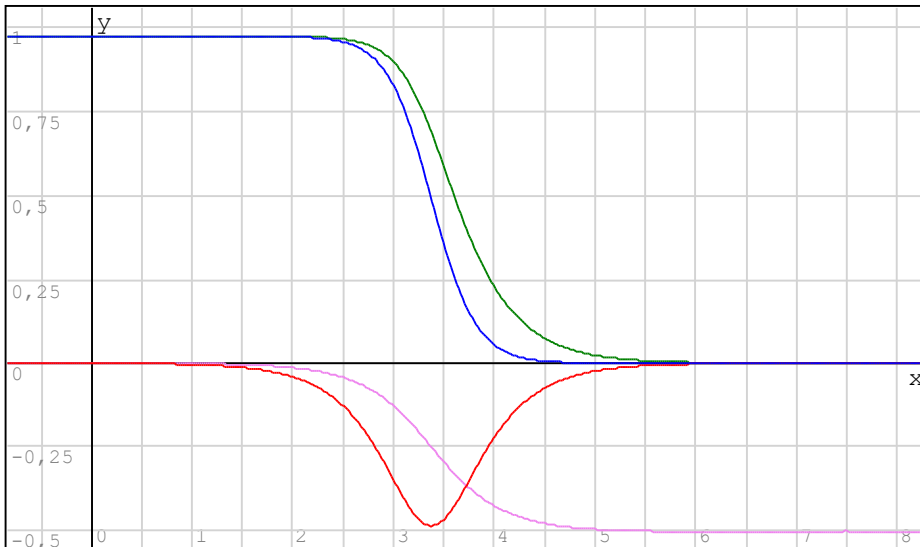
Nullstelle von Im(ZCH(f))

$$\text{Im}(dZCH(1422 \text{ Hz})) = -3,0036 \Omega \text{ s}$$

$$\text{Im}(dZCH(1423 \text{ Hz})) = -0,8387 \Omega \text{ s}$$

$$\text{Im}(dZCH(1424 \text{ Hz})) = 1,3214 \Omega \text{ s}$$

$$\begin{cases} \text{Re}(dZCH(10^x \text{ Hz})) \text{ k}\Omega^{-1} \\ \text{Im}(dZCH(10^x \text{ Hz})) \text{ k}\Omega^{-1} \\ |dZCH(10^x \text{ Hz})| \text{ k}\Omega^{-1} \end{cases}$$

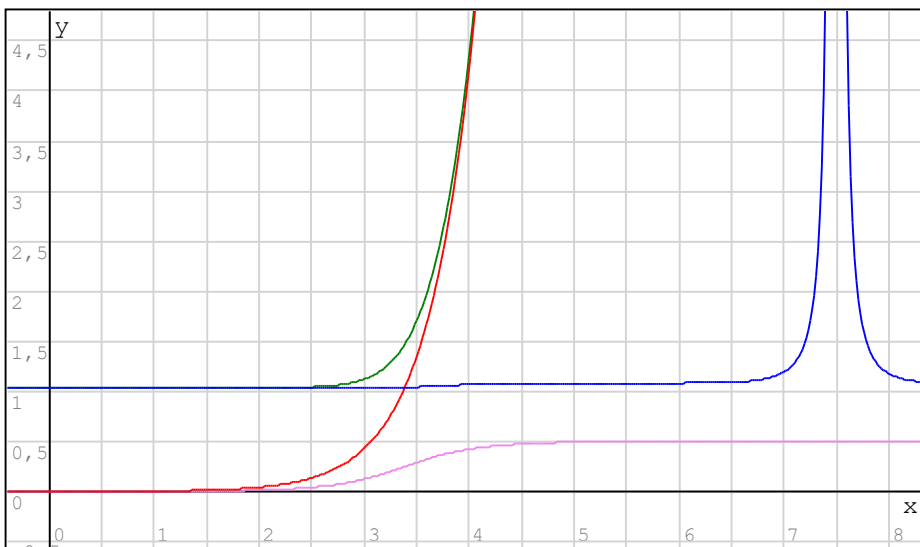


$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(V2zV1\left(10^x \text{ Hz}\right)\right) \\ \operatorname{Im}\left(V2zV1\left(10^x \text{ Hz}\right)\right) \\ \left|V2zV1\left(10^x \text{ Hz}\right)\right| \\ \arg\left(V2zV1\left(10^x \text{ Hz}\right)\right) \cdot \pi^{-1} \end{cases}$$

Wo ist die Phase  $-45^\circ$  ?

$$\begin{aligned} \arg\left(V2zV1\left(2,4 \text{ kHz}\right)\right) &= -44,9317^\circ \\ \arg\left(V2zV1\left(2,4058 \text{ kHz}\right)\right) &= -44,9999^\circ \\ \arg\left(V2zV1\left(2,5 \text{ kHz}\right)\right) &= -46,0845^\circ \end{aligned}$$

$$V1zV2(f) := \frac{1}{V2zV1(f)}$$



$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(V1zV2\left(10^x \text{ Hz}\right)\right) \\ \operatorname{Im}\left(V1zV2\left(10^x \text{ Hz}\right)\right) \\ \left|V1zV2\left(10^x \text{ Hz}\right)\right| \\ \arg\left(V1zV2\left(10^x \text{ Hz}\right)\right) \cdot \pi^{-1} \end{cases}$$

Bestimmung der Frequenz, so das die Absolutwerte der Phase von V2 und V12 gleich sind  
(Vermutung: An diesem Punkt lassen sich die Messwerte am exaktesten ermitteln.)

$$Freq := 2314 \text{ Hz}$$

$$T0 := \frac{1}{Freq}$$

$$V2(t; f) := V2zV1(f) \cdot V1(t; f)$$

$$\arg(V1(0 \text{ s}; Freq)) = -90^\circ$$

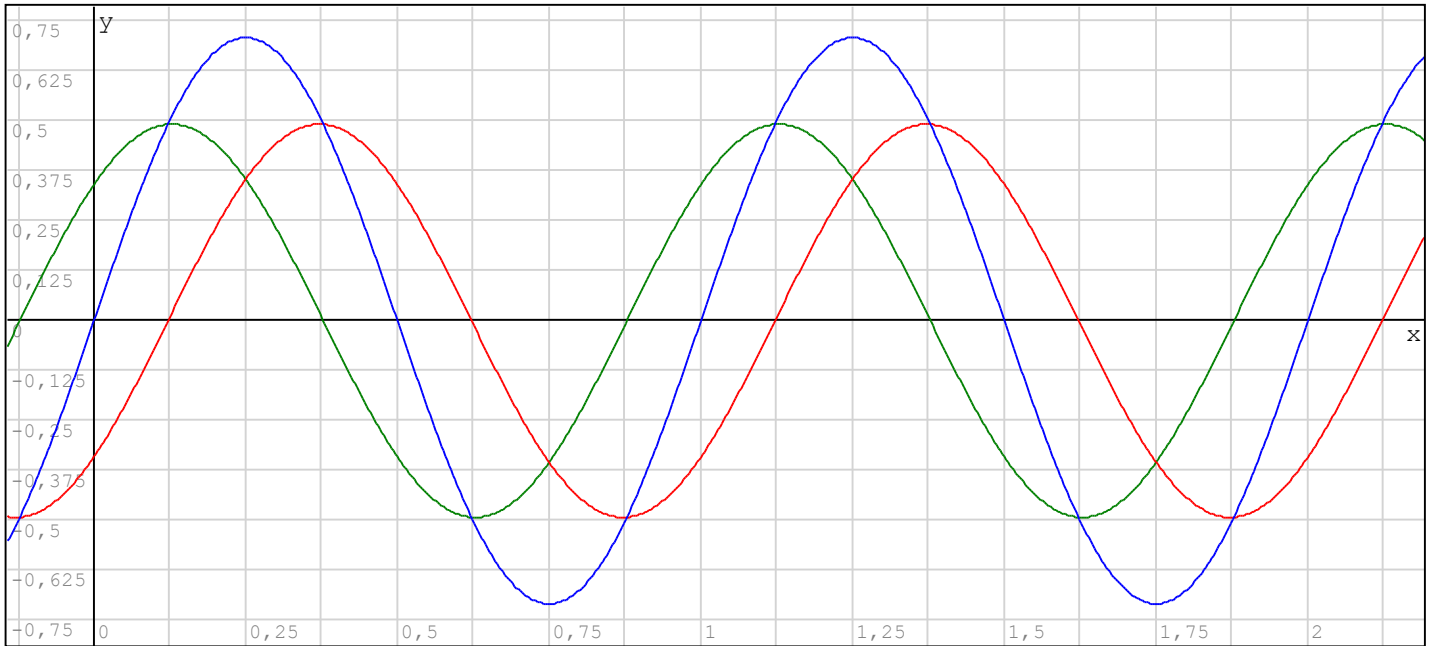
$$\arg(V2(0 \text{ s}; Freq)) = -133,9004^\circ$$

$$\arg(V2(0 \text{ s}; Freq)) - \arg(V1(0 \text{ s}; Freq)) = -43,9004^\circ$$

$$V12(t; f) := V1(t; f) - V2(t; f)$$

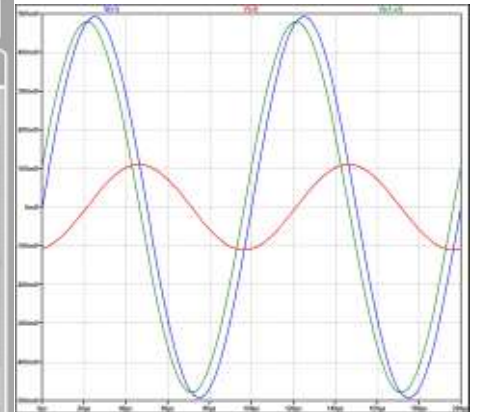
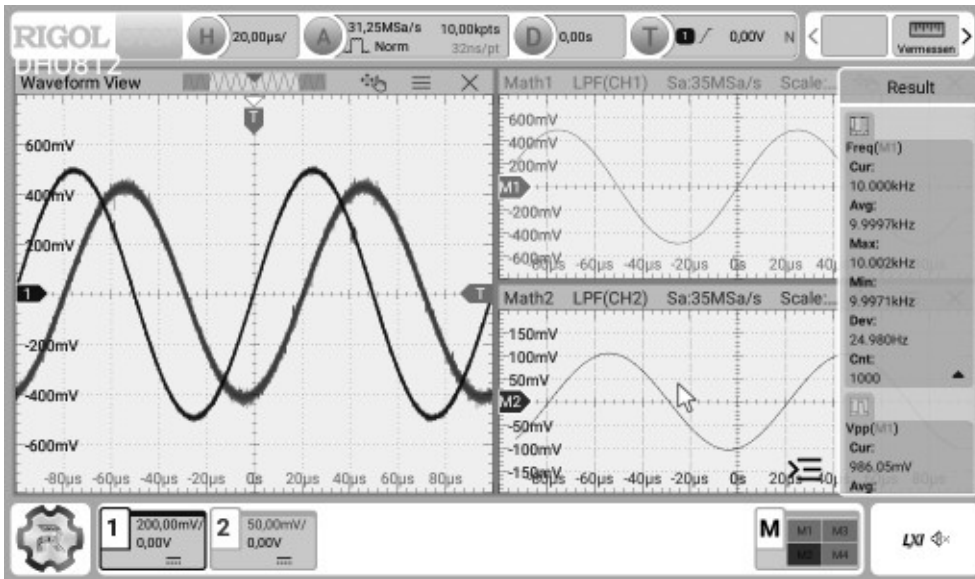
$$\arg(V12(0 \text{ s}; Freq)) = -46,0905^\circ$$

$$\arg(V12(0 \text{ s}; Freq)) - \arg(V1(0 \text{ s}; Freq)) = 43,9095^\circ$$



$$\begin{cases} \operatorname{Re}(V1(x \cdot T0; Freq)) \\ \operatorname{Re}(V2(x \cdot T0; Freq)) \\ \operatorname{Re}(V12(x \cdot T0; Freq)) \end{cases}$$

Messergebnisse



v1: PP(V(V1))=0.985167145729  
 v2: PP(V(V2))=0.220488399267  
 vv12: PP(V(V1,V2))=0.958071765956  
 tv1: time=0.000150000217188  
 tv2: time=0.000171288441868  
 tv12: time=0.000146408253653  
 delv2: tv1-tv2=-2.12882246793e-05  
 delv12: tv1-tv12=3.59196353562e-06  
 phav2: delv2\*freq\*360=-76.6376088456  
 phav12: delv12\*freq\*360=12.9310687282

$F00 := 10 \text{ kHz}$                        $R10 := R1 = 327,1 \text{ k}\Omega$   
 $V10pp := 985,42 \text{ mV}$   
 $V20pp := 209,75 \text{ mV}$                        $R1 \text{ gemessen, nominell } 330 \text{ k}$   
 $phase0 := 50,101^\circ$                        $C1 \text{ gemessen } 200 \text{ pF, nominell } 220 \text{ pF}$

$$V10z20 := \frac{V10pp}{V20pp} \cdot e^{i \cdot phase0} = 3,013512 + 3,604248 \cdot i$$

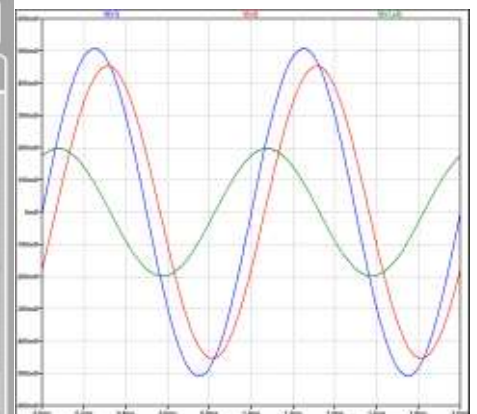
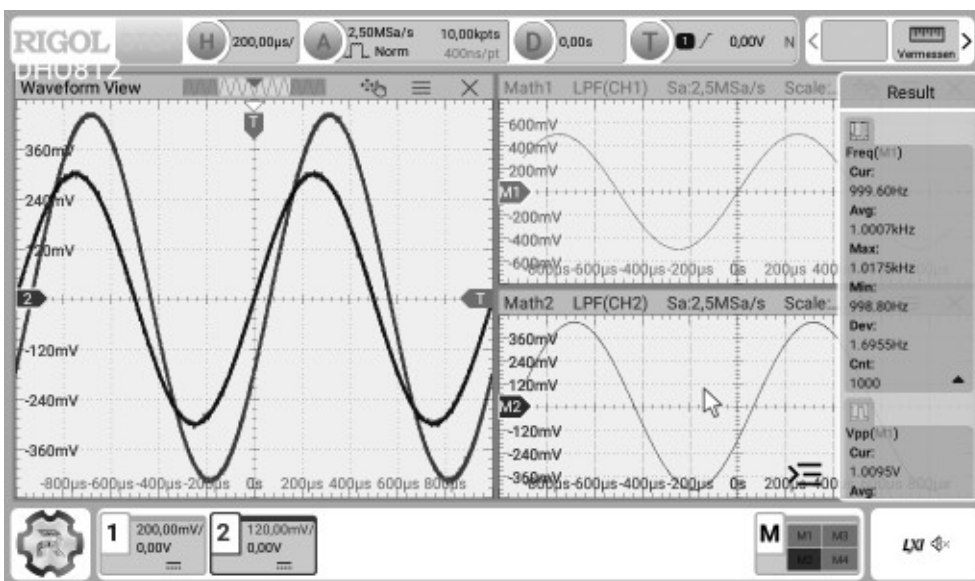
$$ZC10 := \frac{R10}{V10z20 - 1} = (38,6404 - 69,1676 \cdot i) \text{ k}\Omega$$

$$C10 := \frac{-i}{2 \cdot \pi \cdot F00 \cdot ZC10} = (175,3696 - 97,9701 \cdot i) \text{ pF} \quad |C10| = 200,88 \text{ pF}$$

unter Berücksichtigung von Oszi und Tastköpfen

$$ZC10b := \frac{R10}{V10z20 - \frac{R10}{ZCH(F00)} - 1} = (40,7444 - 72,0005 \cdot i) \text{ k}\Omega$$

$$C10b := \frac{-i}{2 \cdot \pi \cdot F00 \cdot ZC10b} = (167,4305 - 94,7473 \cdot i) \text{ pF} \quad |C10b| = 192,38 \text{ pF}$$



v1: PP(V(V1))=1.0152847475  
 v2: PP(V(V2))=0.906160024258  
 vv12: PP(V(V1,V2))=0.395039631007  
 tv1: time=0.00149999675071  
 tv2: time=0.00156340459134  
 tv12: time=0.00132556222831  
 delv2: tv1-tv2=-6.34078406278e-05  
 delv12: tv1-tv12=0.000174434522397  
 phav2: delv2\*freq\*360=-22.826822626  
 phav12: delv12\*freq\*360=62.7964280631

$F01 := 1 \text{ kHz}$                        $R11 := R1 = 327,1 \text{ k}\Omega$   
 $V11pp := 1,0154 \text{ V}$   
 $V21pp := 884,64 \text{ mV}$   
 $phase1 := (-12,898)^\circ$

$$V11z21 := \frac{V11pp}{V21pp} \cdot e^{i \cdot phase1} = 1,118851 - 0,25621 \cdot i$$

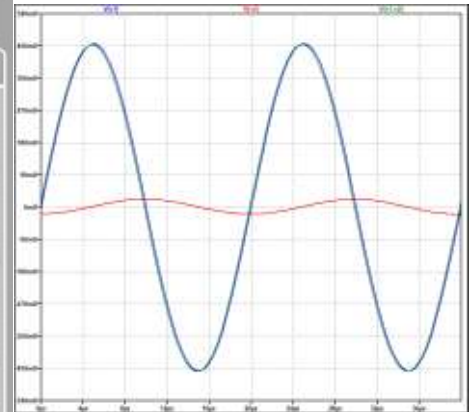
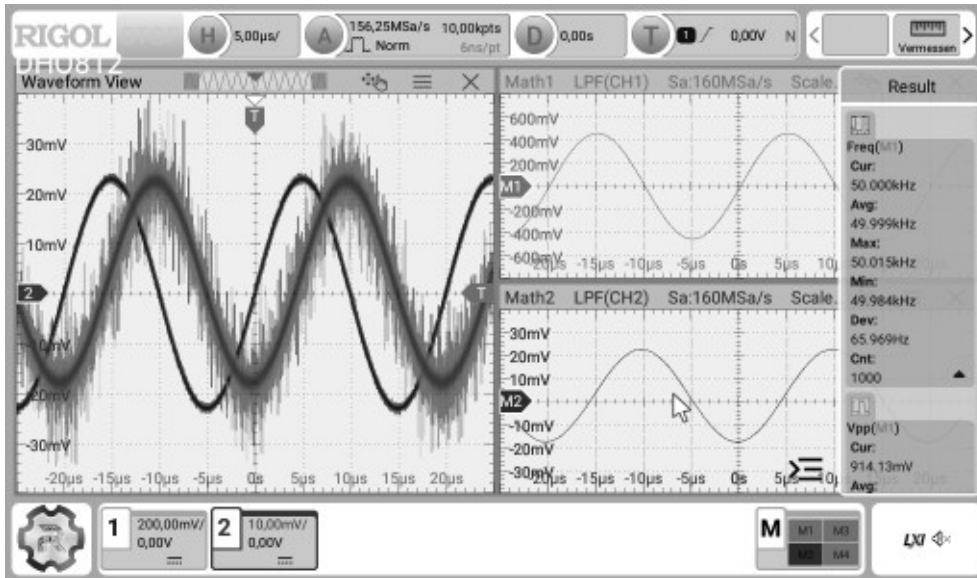
$$ZC11 := \frac{R11}{V11z21 - 1} = (487,3587 + 1050,6103 \cdot i) \text{ k}\Omega$$

$$C11 := \frac{-i}{2 \cdot \pi \cdot F01 \cdot ZC11} = (-124,6625 - 57,8286 \cdot i) \text{ pF} \quad |C11| = 137,422 \text{ pF}$$

unter Berücksichtigung von Oszi und Tastköpfen

$$ZC11b := \frac{R11}{V11z21 - \frac{R11}{ZCH(F01)} - 1} = (329,8552 + 1077,2465 \cdot i) \text{ k}\Omega$$

$$C11b := \frac{-i}{2 \cdot \pi \cdot F01 \cdot ZC11b} = (-135,0775 - 41,361 \cdot i) \text{ pF} \quad |C11b| = 141,268 \text{ pF}$$



```

v1: PP(V(V1))=0.913349866867
v2: PP(V(V2))=0.0425961557776
vv12: PP(V(V1,V2))=0.911988009175
tv1: time=3.00000165849e-05
tv2: time=3.50366362552e-05
tv12: time=2.98443468975e-05
delv2: tv1-tv2=-5.03661967035e-06
delv12: tv1-tv12=1.55669687379e-07
phav2: delv2*freq*360=-90.6591540664
phav12: delv12*freq*360=2.80205437282

```

$$F02 := 50 \text{ kHz} \quad R12 := R1 = 327,1 \text{ k}\Omega$$

$$V12pp := 913,44 \text{ mV}$$

$$V22pp := 40,328 \text{ mV}$$

$$phase2 := 54,109^\circ$$

$$V12z22 := \frac{V12pp}{V22pp} \cdot e^{i \cdot phase2} = 13,278609 + 18,349746 \cdot i$$

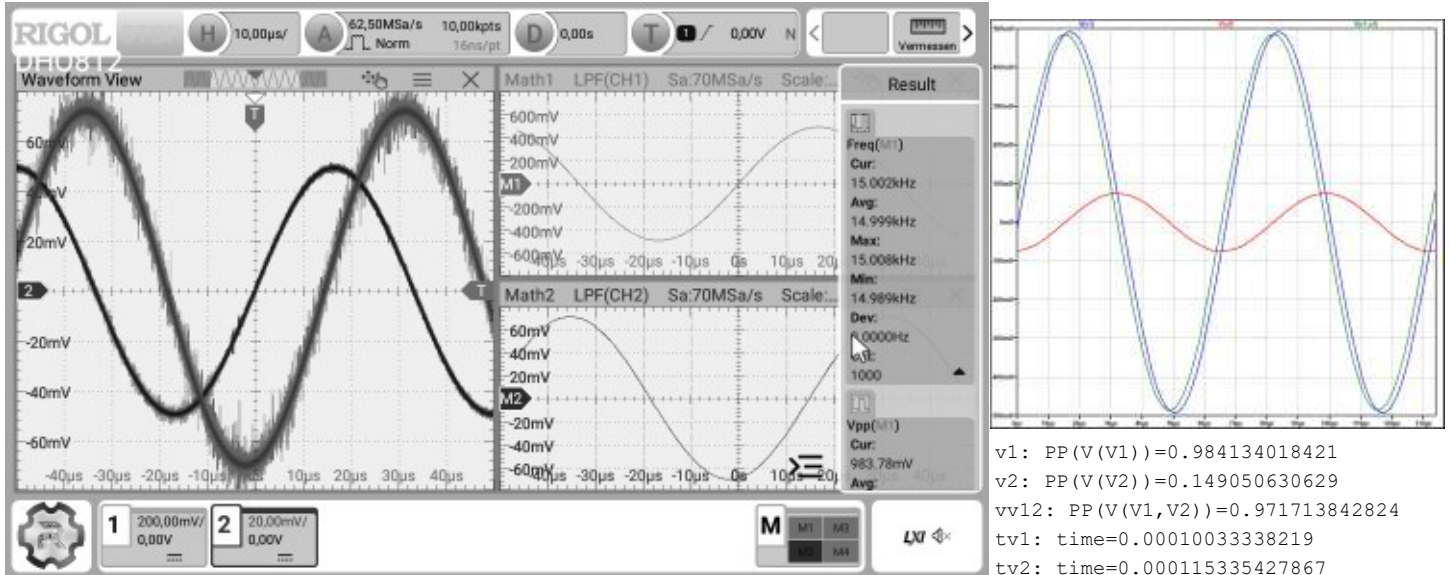
$$ZC12 := \frac{R12}{V12z22 - 1} = (8,239 - 12,3128 \cdot i) \text{ k}\Omega$$

$$C12 := \frac{-i}{2 \cdot \pi \cdot F02 \cdot ZC12} = (178,5664 - 119,4865 \cdot i) \text{ pF} \quad |C12| = 214,856 \text{ pF}$$

unter Berücksichtigung von Oszi und Tastköpfen

$$ZC12b := \frac{R12}{V12z22 - \frac{R12}{ZCH(F02)} - 1} = (8,6785 - 12,5449 \cdot i) \text{ k}\Omega$$

$$C12b := \frac{-i}{2 \cdot \pi \cdot F02 \cdot ZC12b} = (171,6083 - 118,717 \cdot i) \text{ pF} \quad |C12b| = 208,67 \text{ pF}$$



$F_{03} := 15 \text{ kHz}$   
 $V_{13pp} := 984,16 \text{ mV}$   
 $V_{23pp} := 141,76 \text{ mV}$   
 $phase3 := 60,405^\circ$

$R_{13} := R_1 = 327,1 \text{ k}\Omega$

$v1: PP(V(V1))=0.984134018421$   
 $v2: PP(V(V2))=0.149050630629$   
 $vv12: PP(V(V1,V2))=0.971713842824$   
 $tv1: time=0.00010033338219$   
 $tv2: time=0.000115335427867$   
 $tv12: time=9.87198092427e-05$   
 $delv2: tv1-tv2=-1.50020456766e-05$   
 $delv12: tv1-tv12=1.61357294723e-06$   
 $phav2: delv2*freq*360=-81.0110466537$   
 $phav12: delv12*freq*360=8.71329391505$

$$V_{13z23} := \frac{V_{13pp}}{V_{23pp}} \cdot e^{i \cdot phase3} = 3,428634 + 6,036714 \cdot i$$

$$Z_{C13} := \frac{R_{13}}{V_{13z23} - 1} = (18,7625 - 46,6368 \cdot i) \text{ k}\Omega$$

$$C_{13} := \frac{-i}{2 \cdot \pi \cdot F_{03} \cdot Z_{C13}} = (195,8163 - 78,779 \cdot i) \text{ pF}$$

$$|C_{13}| = 211,069 \text{ pF}$$

unter Berücksichtigung von Oszi und Tastköpfen

$$Z_{C13b} := \frac{R_{13}}{V_{13z23} - \frac{R_{13}}{Z_{CH}(F_{03})} - 1} = (19,6231 - 48,3668 \cdot i) \text{ k}\Omega$$

$$C_{13b} := \frac{-i}{2 \cdot \pi \cdot F_{03} \cdot Z_{C13b}} = (188,3661 - 76,4229 \cdot i) \text{ pF}$$

$$|C_{13b}| = 203,279 \text{ pF}$$